Theoretische Physik III (Schäfer)

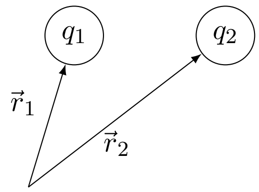
Robin Heinemann

6. Mai 2018

Inhaltsverzeichnis

Teil A.
Phänomenologie der Maxwell-Gleichungen

A.1. elektrisches Feld



$$
\begin{aligned}
F &= k\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \\
k &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \\
\varepsilon_0 &= 8654 \times 10^{-12}\,\mathrm{A\,s\,V^{-1}\,m} \simeq \frac{1}{4\pi 9 \times 10^9}\mathrm{A\,s\,V^{-1}\,m}
\end{aligned}
$$

im SI-System.

$$q \to \frac{q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} \to k = 1, F = \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}$$

q wird gemessen in $\sqrt{\mathrm{erg\,cm}} = 1\,\mathrm{esu}$ „elektrostatic unit“.

A.2. elektrische Feldstärke

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$$

Achtung

viele Bücher verlangen:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta q}$$

dies ist nicht notwending $\to$ Linearität der Elektrodynamik

analog: Lorentz-Kraft auf bewegte Ladungen $\to$ magnetische Felder

A.3. Maxwell-Gleichungen

$\to$ axiomatisch für die Elektrodynamik. Verbindung zwischen Ladungsdichte ρ, elektrischen Stromdichte $\vec{j}$ und den Feldern $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$ und $\vec{B}$. In einem Inertialsystem nehmen die Maxwell-Gleichungen diese Form an:

1. div $\vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ Gesetz von Grauß.
   elektrische Ladungen sind Quellen des elektrischen Feldes

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \,\mathrm{div}\,\vec{E} \overset{\substack{\text{Satz von Gauß}\\ \uparrow}}{=} \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{S}\,\vec{E} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{el. Fluss}}}{\psi} = \int_v \mathrm{d}^3 r 4\pi\rho = 4\pi \overset{\substack{\text{eingschl. Ladung}\\ \uparrow}}{q}$$

2. div $\vec{B} = \nabla \vec{B} = 0$

$$\int_v \mathrm{d}^3 r \operatorname{div} \vec{B} = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{S}\vec{B} = \phi = 0$$

3. rot $\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -\partial_{ct}\vec{B}$ Faraday-Induktionsgesetz.
$\downarrow$
Lenz.-Regel.

$$\partial_{ct} = \frac{\partial}{\partial(ct)} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = \underbrace{\int_{\partial S} \mathrm{d}\vec{r}\,\vec{E}}_{U} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(ct)} \underbrace{\int_s \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{B}}_{\phi}$$

4. rot $\vec{B} = \nabla \times \vec{B} = \partial_{ct}\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

$$\int_s \mathrm{d}\vec{S} \operatorname{rot} \vec{B} = \int_{\partial S} \mathrm{d}\vec{r}\,\vec{B} = \frac{d}{(ct)} \underbrace{\int_S \mathrm{d}\vec{S}\,\vec{E}}_{\psi} + \frac{4\pi}{c} \underbrace{\int_S \mathrm{d}\vec{S}\,\vec{j}}_{I}$$

A.4. Eigenschaften der Maxwell-Gleichungen

- zwei skalare und zwei vektoriell Gleichungen
- lineare, partielle Differenzialgleichungen erster Ordnung
- für vorgegebene ρ und $\vec{j}$ lassen sich $\vec{E}$ und $\vec{B}$ berechnen
- **oder** aus einer Feldkonfiguration $\vec{E}$ und $\vec{B}$ lassen sich Ladungen ρ und $\vec{j}$ finden
- Maxwell-Gleichungen gelten in einem Inertialsystem: erst die Definitonen aus Bezugssystem bestimmt, was ρ und $\vec{j}$ ist, und damit $\vec{E}$ und $\vec{B}$
  darüber hinaus ist mit Wahl des Systems klar, was xvolt ist, und damit ∂_{ct} und ∇.
- nur eine Skala enthalten: $c \sim$ Lichtgeschwindigkeit
- im Vakuum: $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$: $\varepsilon = 1 = \mu \to \vec{D} = \vec{E}$, $\vec{H} = \vec{B}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial_{ct}\vec{B} \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= -\partial_{ct}\vec{E} \end{aligned}$$

  Wenn man $\vec{E} \to \vec{B}$, $\vec{B} \to -\vec{E}$ vertauscht, dann ändern sich die Gleichungen nicht $\to$ **elektromagnetische Dualität**.

- seltsame Asymmetrie, es gibt kein ρ_{mag} oder $\vec{j}_{\text{mag}}$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 4\pi\rho_{\text{mag}} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial_{ct}\vec{B} + \underbrace{\frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{mag}}}_{=0} \end{aligned}$$

A.5. Erhaltung der elektrischen Ladung

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{B} &= \partial_{ct} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\
\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} &= \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j B_k = 0 = \partial_{ct} \underbrace{\operatorname{div} \vec{E}}_{=4\pi\rho} + \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \vec{j} \\
&= \frac{4\pi}{c} \left(\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} \right) \\
\implies \partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0 & \qquad \text{(Kontinuitätsgleichung)}
\end{aligned}
$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt die Ladungserhaltung

$$
\int_V \mathrm{d}^3 r \partial_t \rho = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\int_V \mathrm{d}^3 r \rho}_{q} = -\int_V \mathrm{d}^3 r \operatorname{div} \vec{j} = -\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{j}
$$

- Änderung der Ladung in einem Volumen = Fluss der Ladung durch die Oberfläche.
- Dynamik der Felder ist konsistent zur Bewegung der Ladungen
- gilt auch in Materie! Ampere-Gesetz und Gauß-Gesetz enthalten falls $\varepsilon \neq 1$ die dielektrische Verschiebung $\vec{D}$.
- es existiert implizit eine zweite Erhaltungsgleichung für die magnetische Ladungen, die nicht existieren. $2(1+3)$ Maxwell-Gleichungen für $2 \cdot 2 \cdot 3$ Felder!

A.6. Elektrodynamik in Materie

Wechselwirkungen zwischen dem elektromagnetischen Feld und Materie ist **sehr** kompliziert im Mikroskopischen $\rightarrow$ in vielen Fällen ist es trotzdem möglich, mit zwei Konstatnen eine einfach **effektive** Beschreibung zu finden.

- ε: Dielektrizitätskonstante $\rightarrow$ $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$
- μ: Permeabilitätskonstante $\rightarrow$ $\vec{B} = \mu \vec{H}$

Im Vakuum: $\varepsilon = 1, \mu = 1$, in Materie: $\varepsilon \neq 1, \mu \neq 1$

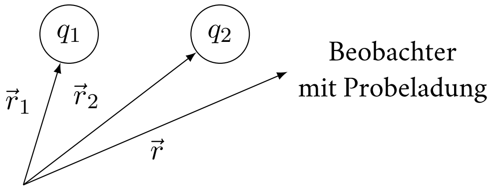
im Vakuum	in Materie
$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$	$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho$
$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$
$\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_{pt} \vec{B}$	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_{pt} \vec{B}$
$\operatorname{rot} \vec{B} = \partial_{ct} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$	$\operatorname{rot} \vec{H} = \partial_{ct} \vec{D} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$

(wir brauchen noch zwei Konzepte, Dipolfelder und das elektrische Potenzial um ein Modell für ε aufstellen zu können).

A.7. elektrisches Potenzial → Elektrostatik

$$\vec{E}(\vec{r}) = q_1 \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$



(Definiton: Probeladung ist positiv → abstoßende Coulomb-Kraft falls $q_1 > 0$.)
Superposition wegen der Linearität der Maxwell-Gleichnug.
Kontinuumslimit: ersetze $q \to \rho$

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= \int_V \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\int_V \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}) \nabla \frac{1}{|r - r'|} \\
&= -\nabla \underbrace{\int_V \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{=\phi(\vec{r})} \\
\to & \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})} \\
\phi(\vec{r}) &= \int_V \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}
\end{aligned}$$

und es gilt automatisch in diesem Fall:

$$\mathrm{rot}\, \vec{E} = -\,\mathrm{rot}\, \nabla\phi = 0; \qquad (\mathrm{rot}\, E)_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi = 0$$

Substitution in das Gauß-Gesetz:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\, \vec{E} &= 4\pi\rho \\
\to & \boxed{\triangle\phi = -4\pi\rho} \qquad \text{(Poisson-Gleichung)}
\end{aligned}$$

Falls keine Ladungen vorliegen, muss $\triangle\phi = 0$ gelten.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{|r - r'|}$$

Für Quelle mit $q = 1$ an der Stelle $\vec{r}' = \vec{0}$:

$$\triangle\phi = \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right)\phi \underset{\downarrow}{=} \triangle \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(r \frac{1}{r} \right) = 0$$

Kugelkoordinaten, Winkel fallen weg, da sie nicht in ϕ vorkommen

klar, bei $\vec{r}$ ist die Ladung nicht, sondern bei $\vec{0}$

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \, \triangle\phi = \int_V \mathrm{d}^3 r \nabla(\nabla\phi) \underset{\downarrow}{=} \int_{\partial V} \mathrm{d}\, \vec{S} \nabla\phi$$

Satz von Gauß

$$= \int r^2 \mathrm{d}\Omega \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial r}}_{=-\frac{1}{r^2}} = -\int \mathrm{d}\Omega = -4\pi$$

Zusammenfassung beider Fälle

$$\triangle \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\delta_D\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)$$

analog für Gravitation

$$\begin{aligned} \text{div}\ \vec{g} &= 4\pi\rho \\ \triangle\phi &= 4\pi G\rho \end{aligned}$$

A.8. Dirac-Funktion δ_D

Elektrodynamik ist eine Kontinuumstheorie $\rightarrow$ ρ ist eine Ladungsdichte:

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \rho = q \qquad \text{(im Volumen } V\text{)}$$

$q\delta_D(\vec{r}-\vec{r}')$ repräsentiert eine Punktladung q an der Stelle $\vec{r}'$.

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= \sum_i q_i \delta_D(\vec{r}-\vec{r}_i) \\ \phi(\vec{r}) &= \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned} \triangle\phi(\vec{r}) &= \int \mathrm{d}^3 r' \rho\left(\vec{r}'\right) \triangle \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int \mathrm{d}^3 r' \rho\left(\vec{r}'\right)(-4\pi)\delta_D\left(\vec{r}-\vec{r}'\right) \\ \triangle\phi(\vec{r}) &= -4\pi\sigma(\vec{r}) \qquad \text{Poisson-Gleichung} \end{aligned}$$

im diskreten Fall:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \\ \triangle\phi(\vec{r}) &= \sum_i q_i \triangle \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_i q_i(-4\pi)\delta_D(\vec{r}-\vec{r}_i) \\ &= -4\pi \sum_i q_i \sigma_D\left(\vec{r}-\vec{r}'\right) = -4\pi\rho(\vec{r}) \end{aligned}$$

A.9. potenzielle Energie und das elektrostatische Potenzial

⚠ **Achtung**

> bitte seid super vorsichtig mit Energieinterpretationen von allem, was mit Relativität zutun hat!

Coulomb-Kraft $\vec{F}$:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\,\vec{E}(\vec{r})$$

Verschiebearbeit W:

$$W = \int_A^B \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{F} = -q\int_A^B \mathrm{d}\vec{r}\,\underset{\substack{\downarrow \\ \vec{E}=-\nabla\phi}}{\vec{E}} = g\int_A^B \underbrace{\mathrm{d}\vec{r}\nabla\phi}_{=\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\phi}$$

mit $\mathrm{d}\vec{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\phi = \mathrm{d}\phi$ (totales Differenzial)

$$W = q\int_A^B \mathrm{d}\phi = q(\phi(B)-\phi(A))$$

- Potenzialdifferenz entspricht der Verschiebearbeit pro Ladung
- Verschiebung muss extrem langsam erfolgen, dass $E \to B$ nicth transformiert (Lorentz!)

A.10. Eigenschaften der δ_D-Funktion

Normierung

$$\int \mathrm{d}^n x \delta_D(x) = 1$$

Lokalisierung

$$\int \mathrm{d}^n x g(x)\delta_D(x-y) = g(y)$$

$$\int_a^b \mathrm{d}x\delta_D(x-c) = \begin{cases} 1 & a\le c\le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Durch Substitution

$$\int \mathrm{d}x\delta_D(ax) = \frac{1}{a}$$

Durch partielle Integration

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}x g(x)\delta_D'(x-a) &= g(x)\delta_D(x-a)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int \mathrm{d}x g'(x)\delta_D(x-a) \\ &= 0 - g'(a)\end{aligned}$$

A.11. Feldänderung an einer Oberfläche

Betrachte Oberfläche mit Oberflächenladung σ

$$\sigma = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta S}$$

wie wird ein elektrischen Feld durch diese Oberfläche beeinflusst? (vor Oberfläche: $\vec{E}_1$, nach Oberfläche $\vec{E}_2$)
Dazu wählen Zylinder mit den Mantelflächen parallel zur Oberfläche und Volumen ΔV und, dass der elektrische Full durch die Seitenwände sehr klein ist und nicht zum Integral beiträgt.

$$\int_{\Delta V}\mathrm{d}^3 r' \operatorname{div}\vec{E} \underset{\text{Gauß}}{\overset{}{\underset{\downarrow}{=}}} \int_{\Delta S}\mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{E} = 4\pi q = 4\pi\overbrace{\int_{\partial V}\mathrm{d}\vec{S}\sigma}^{\Delta S\cdot\sigma} = \Delta S\Big(E_2^\perp - E_1^\perp\Big)$$

$$\implies E_2^\perp = E_1^\perp + 4\pi\sigma$$

Wenn das Feld tangential zur Oberfläche ist, kann man stattdessen eine Schleife wählen und den Satz von Stokes benutzen:

$$\int_\partial \mathrm{d}\vec{r}\,\vec{E}\tau \underset{\text{Stokes}}{\underset{\downarrow}{}} \int_S \mathrm{d}\vec{S}\operatorname{rot}\vec{E} = \Big(E_2^\parallel - E_1^\parallel\Big)\Delta r \to E_2^\parallel = E_1^\parallel$$

Außerdem: $\vec{E} = -\nabla\phi \implies \operatorname{rot}\vec{E} = -\operatorname{rot}\nabla\phi = 0.$

A.12. Energie einer statischen Ladungsverteilung

Achtung

Energie + Relativitätstheorie: supervorsichtig!

1. q_1 an einer Stelle $\vec{r}_1$ $\rightarrow$ Potential $\phi_1 = \frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}$
2. q_2 an einer Stelle $\vec{r}_2$ $\rightarrow$ $W_2 = q_2 \cdot \phi_1(\vec{r}_2)$
3. q_3 an einer Stelle $\vec{r}_3$ $\rightarrow$ $W_3 = q_3 \cdot (\phi_1(\vec{r}_2) + \phi_2(\vec{r}_3))$ Man erkennt

$\vdots$

n. q_n an einer Stelle $\vec{r}_n$ $\rightarrow$ $W_n = q_n \cdot \sum_i^{n-1} \phi_i(\vec{r}_n)$

$$W = \sum_n^N W_n = \sum_n^N q_n \sum_i^{n-1} \phi_i(\vec{r}_n)$$

$$W = \sum_n^N q_n \sum_i^{n-1} \frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_n|} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Korrektur der doppelten Zählung}}}{\frac{1}{2}} \sum_n^N \sum_{\substack{i \\ i \neq n}}^N \frac{q_i q_n}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_n|}$$

Kontinuums-Limes

$$\sum_i q_i \rightarrow \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}')$$

$$W = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \rho(\vec{r}) \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{=\phi(\vec{r})}$$

$$= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r})$$

$$W \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Poisson-Gleichung } \triangle\phi = -4\pi\rho}}{=} -\frac{1}{8\pi} \int \mathrm{d}^3 r \triangle\phi\phi = -\frac{1}{8\pi} \int \mathrm{d}^3 r^3 \phi \triangle\phi$$

Es gilt: $\phi \triangle \phi = \phi \nabla \cdot (\nabla\phi) = \nabla(\phi\nabla\phi) - \nabla\phi\nabla\phi$

$$W = -\frac{1}{8\pi} \int \mathrm{d}^3 r \nabla(\phi\nabla\phi) + \frac{1}{8\pi} \int \mathrm{d}^3 r (\nabla\phi)^2$$
$$= -\frac{1}{8\pi} \int \mathrm{d}\vec{S}(\phi\nabla\phi) + \frac{1}{8\pi} \int \mathrm{d}^3 r \underbrace{(\nabla\phi)^2}_{\vec{E}=-\nabla\phi}$$

Satz von Gauß: $\int \mathrm{d}\vec{S}(\phi\nabla\phi) = 0$ für große Volumen, da typischerweise $\phi \sim 1/r$, $\nabla\phi \sim 1/r^2 \implies \phi\nabla\phi \sim 1/r^3$, aber $\mathrm{d}\vec{S} \sim r^2$

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathrm{d}^3 r E^2$$

Energiedichte des elektrischen Felds:

$$\rho_{el} = \frac{\vec{E}^2}{8\pi}$$

Achtung

Selbstenergie für $\vec{r}' = \vec{r}$- keine Lösung in der klassischen Elektrodynamik.

Teil B.
Potentialtheorie

Lösungen der Poisson-Gleichung $\triangle\phi = -4\pi\rho$. 3 Probleme

1. Inversion des Differenzialoperators $\rightarrow$ Green-Funktion
2. Geometrie der Ladungsverteilung $\rightarrow$ Multipolentwicklung
3. Randbedingungen $\rightarrow$ Green-Theorie

B.1. Green-Theoreme

Es gilt für $\vec{A}(\vec{r}) = \varphi\nabla\psi$

$$\operatorname{div}\vec{A} - \operatorname{div}(\varphi\nabla\psi) = \nabla\varphi\nabla\psi + \varphi\,\triangle\psi$$

Satz von Gauß:

$$\int_V \mathrm{d}^3\,\operatorname{div}\vec{A} = \int_{\partial V}\mathrm{d}\vec{S}\,\vec{A}$$

$\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$, $\vec{n} \sim$ Normalenvektor

$$\int_V \mathrm{d}^3r'\big(\nabla'\varphi\nabla'\psi + \varphi\,\triangle'\psi\big) = \int_{\partial V}\mathrm{d}S\varphi\nabla'\psi\cdot\vec{n} = \int_{\partial V}\mathrm{d}S\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} \qquad \text{Erste greensche Identität}$$

$\varphi \rightleftharpoons \psi$ und Subtraktion der Gleichungen

$$\int_V \mathrm{d}^3r'\big(\varphi\,\triangle'\psi - \psi\,\triangle'\varphi\big) = \int_{\partial U}\mathrm{d}S\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right) \qquad \text{Zweite greensche Identität}$$

Wahl der Funktionen

$$\begin{aligned}
\psi &= \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\
\varphi &= \phi(\vec{r}') && \text{elektrostatisches Potential} \\
\implies \triangle'\psi &= \triangle'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\delta_D(\vec{r}-\vec{r}') \\
\triangle'\varphi &= \triangle\phi = -4\pi\rho(\vec{r}') - 4\pi\int_V \mathrm{d}^3r'\phi(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}') + 4\pi\int_V \mathrm{d}^3r'\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\
&= \int_{\partial V}\mathrm{d}S'\phi(\vec{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial}{\partial n'}\phi(\vec{r}')
\end{aligned}$$

Falls $\vec{r}$ innerhalb von V liegt:

$$\int_V \mathrm{d}^3r'\phi(\vec{r}')\delta_D(\vec{r}-\vec{r}') = \phi(\vec{r})$$

$$\implies \phi(\vec{r}) = \underbrace{\int_V \mathrm{d}^3r'\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\substack{\text{Potenzial aus}\\ \text{der Ladungsverteilung}}} + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V}\mathrm{d}S'\Bigg(\overbrace{\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial}{\partial n'}\phi}^{\substack{\text{Neumann-}\\ \text{Raundbedingungen}\\ \frac{\partial\phi}{\partial n}\text{ auf }\partial V}} - \underbrace{\phi(\vec{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\substack{\text{Dirichlet-}\\ \text{Randbedingung}\\ \phi\text{ auf }\partial V}}\Bigg)$$

∂V unendlich weit weg:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial}{\partial n}\phi \sim \frac{1}{r^3} \to 0$$
$$\phi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \sim \frac{1}{r^3} \to 0$$

$\Longrightarrow$ nur der erste Term bleibt übrig:

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$\rho(\vec{r}) = 0$ innerhalb von V: ϕ bestimmt durch ϕ und $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ auf der Oberfläche ∂V.

B.2. Eindeutigkeit des Potenzials

Satz B.2.1 Potenzial ϕ ist eindeutig mit der Vorgabe von Dirichlet **oder** Neumann-Randbedingungen.

Beweis Annahme für Widerspruchsbeweis: 2 Potenziale $\phi_1(\vec{r})$ und $\phi_2(\vec{r})$, beide Lösungen der Poisson-Gleichnug:

$$\left.\begin{aligned}\triangle\phi_1 &= -4\pi\rho\\ \triangle\phi_2 &= -4\pi\rho\end{aligned}\right\} \triangle\underbrace{(\phi_1-\phi_2)}_{U} = 0$$

Randbedingungen:

$$\phi_1\big|_{\partial V} = \phi_2\big|_{\partial V}$$
$$\frac{\partial\phi_1}{\partial n}\Big|_{\partial V} = \frac{\partial\phi_2}{\partial n}\Big|_{\partial V}$$

1 Green-Theorem mit $U = \phi_1 - \phi_2$ und $\varphi = \psi = U$

$$\int_V \mathrm{d}^3 r' (\underbrace{U\,\triangle' U}_{=0} + (\nabla' U)^2) = \int_{\partial V} \mathrm{d}S U \frac{\partial U}{\partial n}$$

wenn $n = 0$ (Dirichlet) oder $\frac{\partial U}{\partial n'}$ (Neumann)

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}S U \frac{\partial U}{\partial n} = 0$$
$$\Longrightarrow \int_V \mathrm{d}^3 r' (\nabla' U)^2 = 0$$

$\Longrightarrow$ U ist konstant un V, $\phi_1 = \phi_2 + \text{const.}$. Die Potenziale unterscheiden sich nur um eine additive Konstante. □

B.3. Green-Funktion → Potenzial einer Punktladung

Potenzial einer Punktladung:

$$\underbrace{\triangle\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\text{Green-Funktion von }\triangle} = -4\pi\delta_D(\vec{r}-\vec{r}')$$

Verallgemeinerung:

$$\begin{aligned}
\triangle G(\vec{r}, \vec{r}') &= -4\pi\delta_D(\vec{r} - \vec{r}') \\
\text{mit } G(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \underbrace{F(\vec{r}, \vec{r}')}_{\triangle F(\vec{r}, \vec{r}')=0}
\end{aligned}$$

$F(\vec{r}, \vec{r}')$ erfüllt die vakuum-Feldgleichngug $\triangle F = 0 \to F$ kann benutzt werden, um Randbedingungen zu erfüllen. "Spiegelladungen", Superpositionsprinzip (Elektrodynamik ist linear)

$$\begin{aligned}
\triangle G(\vec{r}, \vec{r}') &= \triangle \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi\delta_D(\vec{r} - \vec{r}') \\
\Longrightarrow \int \mathrm{d}^3r' \, \triangle G(\vec{r}, \vec{r}')\rho(\vec{r}') &= \triangle \int \mathrm{d}^3r' G(\vec{r}, \vec{r}')\rho(\vec{r}') \\
&= \triangle \int \mathrm{d}^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\
&= \triangle\phi = -4\pi \int \mathrm{d}^3r' \delta_D(\vec{r} - \vec{r}')\rho(\vec{r}') \\
&= -4\pi\rho(\vec{r}) \\
\Longrightarrow \phi &= \int \mathrm{d}^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{ invertiert } \triangle\phi = -4\pi\rho
\end{aligned}$$

Konstruktion von Green-Funktionen im Fourier-Raum

$$\begin{aligned}
\triangle\phi(\vec{r}) &= -4\pi\rho(\vec{r}) \to \text{Fourier-Transformation (Poisson-Gleichnug ist linear)} \\
\triangle\phi(\vec{r}) &= \triangle \int \mathrm{d}^3k\phi\left(\vec{k}\right) \exp\left(i\vec{k}\vec{r}\right) = \int \mathrm{d}^3k\phi\left(\vec{k}\right) \triangle \exp\left(i\vec{k}\vec{r}\right) \\
&= \int \mathrm{d}^3k\phi\left(\vec{k}\right)\left(i\vec{k}\right)^2 \exp\left(i\vec{k}\vec{r}\right) = -4\pi \int \mathrm{d}^3k\rho\left(\vec{k}\right) \exp\left(i\vec{k}\vec{r}\right) \\
\Longrightarrow \left(i\vec{k}\right)^2\phi\left(\vec{k}\right) &= -k^2\phi\left(\vec{k}\right) = -4\pi\rho\left(\vec{k}\right) \\
\Longrightarrow \phi\left(\vec{k}\right) &= \frac{4\pi}{k^2}\rho\left(\vec{k}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
\rho(\vec{k}) \arrow[r, "-\frac{1}{k^2}"] & \phi(\vec{k}) \arrow[d, "\mathcal{F}^{-1}"] \\
\rho(\vec{r}) \arrow[u, "\mathcal{F}"] & \phi(\vec{r}) \arrow[l, "\triangle"']
\end{tikzcd}$$

für numerische Berechnungen ist es extrem vorteilhaft, die Fourier-Methode zu benutzen → „Fast-Fourier-Transform (FFT)".
Faltung der Ladungsverteilung mit der Green-Funktion → Multiplikation im Fourier-Raum.

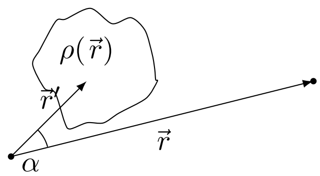
$$\phi(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3r' \underset{\substack{\downarrow \\ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{ für } \triangle}}{G(\vec{r}, \vec{r}')}\rho(\vec{r}') \to \phi\left(\vec{k}\right) = \underset{\substack{\downarrow \\ -\frac{1}{k^2}}}{G\left(\vec{k}\right)}\rho\left(\vec{k}\right)$$

Bestimmung von Green-Funktionen aus dem Differenzialoperator.

$$\begin{aligned}
\triangle G(\vec{r},\vec{r}') &= -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}') \to \text{ Fourier-Transformation} \\
\triangle G(\vec{r},\vec{r}') &= \int \mathrm{d}^3k G(k) \underbrace{\triangle \exp\Big(i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')\Big)}_{=(i\vec{k})^2=-k^2\to G(k)=-\frac{1}{k^2}} = 4\pi \int \mathrm{d}^3k \exp\Big(i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')\Big) \\
G(\vec{r},\vec{r}') &= \int \mathrm{d}^3k G(k)\exp\Big(i\vec{k}\vec{r}\Big) \int \mathrm{d}^3k\Big(-\frac{1}{k^2}\Big)\exp\Big(i\vec{k}\vec{r}\Big) \text{ mit } \vec{r}'=\vec{0} \\
&= \int k^2\mathrm{d}k \int \sin\theta\mathrm{d}\theta \int \mathrm{d}\varphi \frac{1}{k^2}\exp(ikr\cos\theta) = 2\pi\int \mathrm{d}k \int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\mu\exp(ikr\mu) \\
&= 2\pi\int \mathrm{d}k\,\mathrm{sinc}(kr) = \frac{2\pi}{r}\int \mathrm{d}y\,\mathrm{sinc}(y) \\
&= \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

B.4. Multipolentwicklung

Idee: Von „weit weg“ sieht man nur sphärische Ladungsverteilung. Also zerlege Potenzial in sphärischen Anteil und kleine Korrekturen.



$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= \int \mathrm{d}^3r' \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\
\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2-2rr'\cos\alpha+r^2}}
\end{aligned}$$

mit $\mu\cos\alpha$:

$$\begin{aligned}
&\text{Annahme } r>r',\ \vec{r} \text{ ist weit weg von der Ladungsverteilung an } \vec{r}' \\
&= \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r'}{r}\mu+\left(\frac{r'}{r}\right)^2}} \overset{\uparrow}{=} \frac{1}{r}\left(\mathcal{P}_0(\mu)+\frac{r'}{r}\mathcal{P}_1(\mu)+\left(\frac{r'}{r}\right)^2\mathcal{P}_2(\mu)+\dots\right) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^{l+1}}{r'^l}\mathcal{P}_l(\mu)
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}_l \sim$ Legendre Polynome, erzeugende Funktion:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = \sum_l \mathcal{P}_l(x)z^l = \mathcal{P}_0(x)+\mathcal{P}_1(x)z+\mathcal{P}_2(x)z^2+\dots$$

Durch sukksesives Differenzieren kann man durch auswerten an $z = 0$ die $\mathcal{P}_l$ bestimmen:

$$\implies \mathcal{P}_l(\mu) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\mu^l}\left(\mu^2 - 1\right)^l \qquad \text{Formel von Rodrigues}$$
$$\mathcal{P}_0(\mu) = 1$$
$$\mathcal{P}_1(\mu) = \mu$$
$$\mathcal{P}_2(\mu) = \frac{1}{2}\left(3\mu^2 - 1\right)$$
$$\mathcal{P}_3(\mu) = \frac{1}{2}\left(5\mu^5 - 3\mu^2\right)$$

Legendre Polynome sind ein Satz orthogonaler Polynome:

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}\mu \mathcal{P}_l(\mu)\mathcal{P}_{l'}(\mu) = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

Additionstheorem: Y_{lm}: spärische-harmonische Funktionen

$$\mathcal{P}_l(\mu) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\varphi)Y^*_{lm}(\theta',\varphi')$$
$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_l \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1}\frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta,\varphi)Y^*_{lm}(\theta',\varphi')$$
$$\phi(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3r' \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$
$$\implies \phi(\vec{r})\int \mathrm{d}^3r' \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{1}{r^{l+1}}Y_{lm}(\theta,\varphi)\underbrace{\int \mathrm{d}^3r'\rho(\vec{r}')r'^l Y^*_{lm}(\theta',\varphi')}_{q_{lm}}$$

q_{lm}: Multipol-Moment

Beitrag von q_{lm} zu ϕ ist $\propto \frac{1}{r^{l+1}} \implies$ höhere Multipolmomente haben Beiträge nur auf kleinen Skalen.

- Monopol: $l = 0 \implies$ 1 Zahl, $m = 0$

$$q_{00} = \int \mathrm{d}^3\rho(\vec{r}')r'^0 Y_{00}(\theta',\varphi') = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int \mathrm{d}^3r'\rho(\vec{r}') = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}}$$

- Dipol $l = 1 \implies$ 3 Zahlen, $m = -1, 0, +1$
- Oktupol $l = 2 \implies$ 5 Zahlen, $m = -2, -1, 0, +1, +2$
- Hexadekupol $l = 3 \implies$ 7 Zahlen, $m = -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$
- -Multipol $\implies$ $2l + 1$ Zahlen, von $-l$ bis l

Hermitizität:

$$Y^*_{lm} = (-1)^m Y_{lm}$$

$$\implies q^*_{lm} = \int \mathrm{d}^3r'\rho(\vec{r}')r'^l Y^*_{lm}(\theta',\varphi') = (-1)^m \int \mathrm{d}^3r'\rho(\vec{r}')Y_{l,rm}(\theta,\varphi)$$
$$q^*_{lm} = (-1)^m q_{lm}$$

Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ist reell $\implies$ nur $l + 1$ unabhängige Momente.

B.5. sphärisch-harmonische Funktionen

Lineares Funktionensystem auf der Kugel (θ, φ) nach dem alle skalaren Funktionen entwickelt werden können.

$$\begin{aligned}
Y_{lm}(\theta,\varphi) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\mathcal{P}_{lm}(\cos\theta)e^{im\varphi} \\
Y_{00}(\theta,\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \implies \phi(\vec{r}) = \frac{Q}{r}, Q = q_{00}, l = m - 0 \\
Y_{10}(\theta,\varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \\
Y_{11}(\theta,\varphi) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}_{lm}(\cos\theta)$: assoziierte Legendre Polynome

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{lm}(\mu) &= (-1)^m\left(1-\mu^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\mu^m}\mathcal{P}_l(\mu) \\
\mathcal{P}_{lm}(\mu) &= \frac{(-1)^m}{2^l l!}\left(1-\mu^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}\mu^{l+m}}\left(\mu^2-1\right)^l \\
\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\mu\mathcal{P}_{lm}(\mu)P_{l'm'}(\mu) &= \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{ll'}
\end{aligned}$$

$\implies$ sphärisch harmonische Funktionen

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta Y_{lm}(\theta,\varphi)Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \qquad \text{(Orthogonalität)}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}Y_{lm}(\theta,\varphi)Y^*_{lm}\left(\theta',\varphi'\right) &= \delta_D\left(\varphi-\varphi'\right)\underbrace{\delta_D\left(\cos\theta-\cos\theta'\right)}_{=\delta_D(\theta-\theta')} \\
\mathcal{P}_l(\cos\alpha) &= \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{+l}Y^*_{lm}(\theta,\varphi)Y_{lm}\left(\theta',\varphi'\right)
\end{aligned}$$

in karthesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
q_{10} &= \int\mathrm{d}^3r'\rho(\vec{r})r'Y_{10}\left(\theta',\varphi'\right) = \int\mathrm{d}^3r'\rho(\vec{r})r'\frac{3}{4\pi}\cos\theta \\
q_{11} &= \int\mathrm{d}^3r'\rho(\vec{r})r'Y_{10}\left(\theta',\varphi'\right) = \int\mathrm{d}^3r'\rho(\vec{r})r'\frac{3}{8\pi}\sin\theta(\cos\varphi+i\sin\varphi)
\end{aligned}$$

intuitives System, Dipolmoment $\vec{p} = q\,\vec{a}$

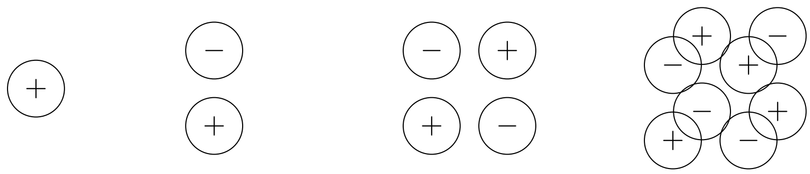
$$\begin{aligned}
\rho(\vec{r}) &= q\left(\delta_D\left(\vec{r}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)-\delta_D\left(\vec{r}+\frac{1}{2}\vec{a}\right)\right) \\
\vec{p} &= \int\mathrm{d}^3r'\rho\left(\vec{r}'\right)\vec{r}' = q\int\mathrm{d}^3r'\left(\delta_D\left(\vec{r}'-\frac{\vec{a}}{2}\right)-\delta_D\left(\vec{r}'+\frac{\vec{a}}{2}\right)\right)\vec{r}' = q\,\vec{a}
\end{aligned}$$

(Dipolmoment)

$$\begin{aligned}
q_{10} &= \int\mathrm{d}^3r'\delta(\vec{r})\sqrt{\frac{3}{4\pi}}r'\cos\theta' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}p_z \\
q_{11} &= \int\mathrm{d}^3r'\delta(\vec{r})\sqrt{\frac{3}{8\pi}}r'\sin\theta'\left(\cos\varphi'+i\sin\varphi'\right) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}(p_x+ip_y)
\end{aligned}$$

Quadrupolmomente ($l = 2$)

$$
\begin{aligned}
q_{20} &= \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}') r'^2 \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta' \frac{1}{2} \right) \\
q_{21} &= - \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}') r'^2 \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{i\varphi} \\
q_{22} &= \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}') r'^2 \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi}
\end{aligned}
$$



Monopol: $\phi \sim \frac{Q}{r}$ Dipol $\phi \sim \frac{Q}{r^2}$ Quadropol $\phi \sim \frac{Q}{r^3}$ Oktopol $\phi \sim \frac{Q}{r^4}$

B.6. Alternativer Zugang zur Multipolentwicklung → Taylor-Reihe in kartesischen Koordinaten

Green-Funktion

$$
G(\vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}
$$

Taylorentwicklung bei $\vec{r}' = 0$

$$
\begin{aligned}
G(\vec{r}') &= G\left(\vec{r}' = \vec{0}\right) + \sum_i \frac{\partial G}{\partial x_i'}\Big|_{\vec{r}'=\vec{0}} \cdot x_i' + \frac{1}{2!} \sum_{ij} \frac{\partial G}{\partial x_i' \partial x_j'}\Big|_{\vec{r}'=\vec{0}} \cdot x_i' x_j' + \dots \\
&= \sum_n \frac{1}{n!} \left(\sum_i x_i' \frac{\partial}{\partial x_i'} \right)^n G\Big|_{\vec{r}'=0} = \sum_n \frac{1}{n!} \cdot \left(\vec{r}' \nabla'\right)^n G\Big|_{\vec{r}'=\vec{0}} \\
G(\vec{r}') &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \left[\sum_i (x_i - x_i')^2 \right]^{-1/2} \\
G(\vec{r}')\Big|_{\vec{r}'=\vec{0}} &= \frac{1}{r} \\
\frac{\partial}{\partial x_i'} G(\vec{r}')\Big|_{\vec{r}'=\vec{0}} &= \frac{x_i}{r^3} \\
\frac{\partial^2}{\partial x_i' \partial x_j'} G(\vec{r}')\Big|_{\vec{r}'=0} &= \frac{3 x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} \\
\phi(\vec{r}) &= \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') \\
&= \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}') \left(\frac{1}{r} + \sum_i \frac{x_i x_i'}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{3 x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} x_i' x_j' + \dots \right) \\
&= \frac{1}{r} \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}') + \sum_i \frac{x_i}{r^3} \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}') x_i' + \frac{1}{2} \sum_{ij} \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}') \frac{3 x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} x_i' x_j' + \dots
\end{aligned}
$$

Umschreiben des Quadrupolterms

Quadrupolterm $\times 3$:

$$= \sum_{ij} \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}') 3x_i' x_j' \underbrace{-r'^2 \delta_{ij} + r'^2 \delta_{ij}}_{=0}$$

$$= \sum_{ij} \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} \left(\int \underbrace{\mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}') \left(3x_i' x_j' - r'^2 \delta_{ij}\right)}_{Q_{ij}} + \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}') r'^2 \delta_{ij} \right)$$

2. Term verschwindet:

$$\sum_{ij} \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} \delta_{ij} = 0$$

1 $\quad \sum_{ij} x_i x_j \delta_{ij} = \sum_i x_i^2 = r^2$

2 $\quad \sum_{ij} \delta_{ij} \delta_{ij} = \sum_i \delta_{ii} = 3$

$$\implies \phi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{r}\,\vec{p}}{r^3} + \frac{1}{6} \sum_{ij} Q_{ij} \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} + \dots$$

$Q_{ij} = Q_{ji} \implies$ symmetrische Matrix $\implies$ 6 Einträge! Aber: in sphärischen Koordinaten: $q_{-2,-2} q_{2,-1}, q_{2,0}, q_{2,1}, q_{22} \implies$ 5 Einträge. Es gilt: Q_{ij} ist spurfrei:

$$\sum_i Q_{ij} = \sum_i \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}') \left(3x_i' x_i' - r'^2 \delta_{ij}\right)$$

$$= \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}') \left(3 \sum_i x_i'^2 - r'^2 \sum_i \delta_{ii}\right) = 0$$

B.7. Wechselwirkung einer Ladunsverteilung mit einem externen Feld

$$W = \int \mathrm{d}^3 r \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r})$$

Subtraktion von $\triangle\phi = 0$, weil die felderzeugende Ladung woanders ist!

$$\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}=0) + \sum_i x_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\Big|_{\vec{r}=\vec{0}} + \frac{1}{2}\sum_{ij} \overset{\uparrow}{x_i x_j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \dots$$

$$\triangle\phi = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\phi = \sum_{ij} \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\phi$$

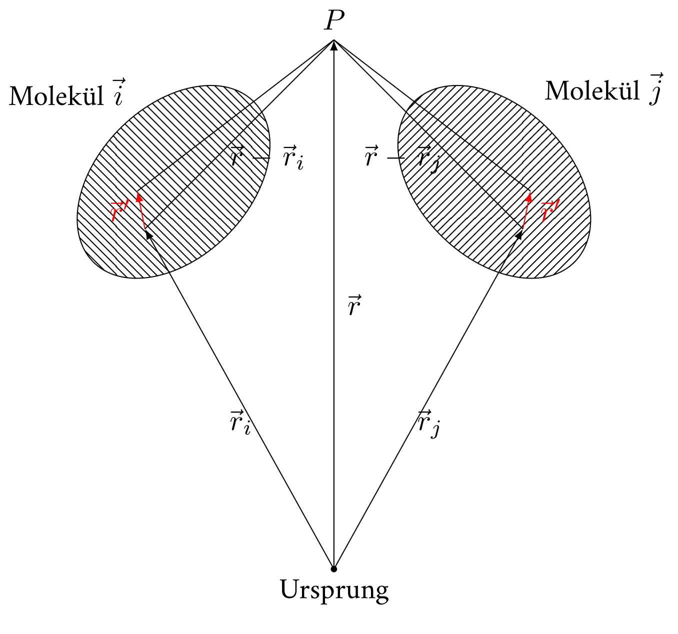
$$\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}=0) + \sum_i x_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\Big|_{\vec{r}=\vec{0}} + \frac{1}{3!}\sum_{ij} \left(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{\vec{r}=0} + \dots$$

$$W = \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r \rho(r)}_{Q} \phi(\vec{r}=0) + \sum_i \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r \rho(r) x_i}_{p_i} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\Big|_{\vec{r}=\vec{0}} + \frac{1}{3!}\sum_{ij} \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r \rho(r) \left(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}}_{Q_{ij}}\Big|_{v=\vec{0}} + \dots$$

$$= q\phi(\vec{r}=0) + \vec{p}\nabla\phi\big|_{\vec{r}=0} + \sum_{ij} Q_{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{\vec{r}=0} + \dots$$

l Multipol wechselwirkt mit der l-fachen Ableitung von ϕ.

B.8. Polarisation und Modelle für Dielektrika



Feld $\vec{E}_j$ an der Stelle $\vec{r}$, hervorgerufen durch Molekül j

$$\vec{E}_j(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3 r' \rho_j(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}_j - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}_j - \vec{r}'|^3} = -\nabla \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}_j - \vec{r}'|}$$

Multipolentwickulng

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j'-\vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j|} + \left(\vec{r}'\nabla_j\right)\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j|} + \frac{1}{2}\left(\vec{r}'\nabla_j\right)^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j|} + \dots$$

$$\Longrightarrow \vec{E}_j(\vec{r}) = -\nabla\left(\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\rho_j(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}_j|} + \int \mathrm{d}^3r'\rho_j\left(\vec{r}'\right)\vec{r}'\nabla_j\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j|} + \dots\right)$$

$$= -\nabla\left(\frac{q_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|} + \vec{p}_j\nabla_j\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j|} + \dots\right)$$

Ladungsdichte:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_j q_j\delta_D(\vec{r}-\vec{r}_j)$$

Polarisationsdichte:

$$\vec{\pi}(\vec{r}) = \sum_j \vec{p}_j\delta_D(\vec{r}-\vec{r}_j)$$

Summation der Felder zum Kontinuums-Limes:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_j \vec{E}_j(\vec{r}) = -\nabla\left(\sum_j \frac{q_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|} + \vec{p}_j\nabla_j\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j|}\right)$$

$$= -\nabla\left(\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \vec{\pi}(\vec{r}')\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = -\triangle\left(\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \vec{\pi}(\vec{r})\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)$$

$$= -\int \mathrm{d}^3r'\rho\left(\vec{r}'\right)\underbrace{\triangle\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{-4\pi\delta_D(\vec{r}-\vec{r}')} + \vec{\pi}\left(\vec{r}'\right)\underbrace{\nabla'\underbrace{\triangle\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{=-4\pi\delta_D(\vec{r}-\vec{r}')}}_{=-\nabla\delta_D(\vec{r}-\vec{r}')}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi\int \mathrm{d}^3r'\rho\left(\vec{r}'\right)\delta_D\left(\vec{r}-\vec{r}'\right) - 4\pi\nabla\int \mathrm{d}^3r'\,\vec{\pi}\left(\vec{r}'\right)\delta_D\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi\rho - 4\pi\,\mathrm{div}\,\vec{\pi}$$

$$\mathrm{div}\underbrace{\left(\vec{E}+4\pi\vec{\pi}\right)}_{\vec{D}} = 4\pi\rho$$

$\vec{\pi}$ ist oft abhängig von dem externen Feld (da das externe Feld die Moleküle ausrichtet), dann gilt:

$$\vec{\pi} = \varkappa\vec{E}, \quad \varkappa: \text{ Suszeptibilität}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \varepsilon = 1 + 4\pi\varkappa$$

Teil X.
orthogonale Funktionensysteme

X.1. orthogonale Funktionensysteme

Satz von Funktionen $\{u_1, \ldots, u_n(x)\}$. Für komplexe Funktionen definiert

$$\langle u_i, u_j \rangle = \int_A^b \mathrm{d}x u_i(x) u_j^*(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Orthogonalitätsrelation}}}{A_i \delta_{ij}} \quad A_i = 1 \implies \text{orthonormal.}$$

ein Skalarprodukt.(symmetrisch, bilinear und positiv definit). Norm von $u_i(x)$:

$$\int_a^b \mathrm{d}x u_i(x) u_i^*(x) = A_i$$

$\implies$ normalisiere u_i:

$$u_i'(x) = \frac{u(x)}{\sqrt{\int_a^b \mathrm{d}x u_i(x) u_i^*(x)}}$$

Bilden die orthonomalen Funktionen eine Basis?

$$\begin{aligned}
g(x) &\overset{?}{=} \sum_i^n g_i u_i(x) \\
0 \leq \Delta n &= \int_a^b \mathrm{d}x \left| g(x) - \sum_i^n g_i u_i(x) \right|^2 \\
&= \int_a^b \mathrm{d}x g(x) g^*(x) - \int_a^b \mathrm{d}x g(x) \sum_i g_i^* u_i^*(x) - \int_a^b \mathrm{d}x \sum_i g_i u_i(x) g^*(x) + \int_a^b \mathrm{d}x \sum_{ij} g_i u_i(x) g_j^* u_j^* \\
&= \int_a^b \mathrm{d}x g(x) g^*(x) - \sum_i g_i^* \int_a^b \mathrm{d}x g(x) u_i^*(x) - \sum_i g_i \int_a^b \mathrm{d}x u_i(x) g^*(x) + \sum_{ij} g_i g_j^* \int_a^b \mathrm{d}x u_i(x) u_j^*
\end{aligned}$$

Minimierung von Δn:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta}{\partial g_i} &\overset{!}{=} 0 = g_i^* - \int_a^b \mathrm{d}x g^*(x) u_i(x) \\
\frac{\partial \Delta}{\partial g_i^*} &= g_i - \int_a^b \mathrm{d}x g(x) u_i^*(x) \\
\implies g_i &= \int_a^b \mathrm{d}x g(x) u_i^*(x)
\end{aligned}$$

Minimum:

$$\Delta = \int_a^b \mathrm{d}x g(x) g^*(x) - \sum_i g_i g_i^*$$

Konvergenz im quadratischen Mittel

$$\lim_{n \to \infty} \Delta_n \big|_{min} = \lim_{n \to \infty} \int_a^b \left| \sum_i^n g_i u_i(x) - g(x) \right|^2 = 0$$

Konvergenz gesichert, falls: (Parseval-Reltation/Vollständigkeitsrelation)

$$\int_a^b \mathrm{d}x g(x) g^*(x) = \sum_i g_i g_i^*$$

Bessel-Ungleichnug:

$$\int_a^b \mathrm{d}x g(x) g^*(x) \geq \sum_i g_i g_i^*$$

denn:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b \mathrm{d}x \left| g(x) - \sum_i^n g_i u_i(x) \right|^2 \\ &= \int_a^b \mathrm{d}x g(x) g^*(x) - 2 \sum_i g_i \int_a^b \mathrm{d}x g^*(x) u_i(x) + \sum_{ij} g_i g_j^* \underbrace{\int_a^b \mathrm{d}x u_i(x) u_i^*(x)}_{=\delta_{ij}} \end{aligned}$$

Im Fall $\Delta n = 0$ für $n \to \infty$:

$$\int_a^b \mathrm{d}x g(x) g^*(x) = \sum_i^n g_i g_i^*$$

Was bedeutet das für das Basissystem?

$$\begin{aligned} \sum_i g_i g_i^* &= \sum_i \int \mathrm{d}x g(x) u_i^*(x) \int \mathrm{d}x' g^*(x') u_i(x') \\ &= \int_a^b \mathrm{d}x g(x) \int_a^b \mathrm{d}x' g^*(x') \underbrace{\sum_i u_i^*(x) u_i(x')}_{\delta_D(x-x')} \stackrel{?}{=} \int_a^b \mathrm{d}x g(x) g^*(x) \\ &= \int_a^b g(x) \int_a^b g^*(x') \delta_D(x - x') = \int_a^b g(x) g^*(x) \end{aligned}$$

dies gilt, wenn: (Anforderung an das Basissystem)

$$\sum_i u_i^*(x) u_i(x') = \delta_D(x - x')$$

Basissystem muss in der Lage sein, die δ_D-Funktion darzustellen.
Cauchy-Schwarz-Ungleichung $\sim$ Eindeutigkeit der Linearzerlegung:

$$\begin{aligned} &\Big(\sum_i a_i b_i\Big)^2 \leq \sum_i a_i^2 \sum_j b_j^2 \\ &\implies |\vec{a}\,\vec{b}|^2 \leq \vec{a}^2\,\vec{b}^2 \\ &|\vec{a} - \lambda\vec{b}|^2 = 0 \quad \text{kann nur} \begin{cases} \text{1 Lösung haben} & \text{falls } \vec{a} \parallel \vec{b} \\ \text{keine Lösung haben} & \text{falls } \vec{a} \nparallel \vec{b} \end{cases} \\ &\qquad = \vec{a}^2 - 2\lambda\vec{a}\,\vec{b} + \lambda^2\vec{b}^2 \\ &\implies \lambda_\pm = 2\vec{a}\,\vec{b} \pm \sqrt{4(\vec{a}\,\vec{b})^2 - 4\vec{a}^2\vec{b}^2} \end{aligned}$$

$$\sqrt{4(\vec{a}\,\vec{b})^2 - 4\vec{a}^2\vec{b}^2} \begin{cases} \text{hat eine Lösung} & \text{falls } (\vec{a}\,\vec{b})^2 = \vec{a}^2\,\vec{b}^2 \\ \text{hat keine Lösung} & \text{falls } (\vec{a}\,\vec{b})^2 < \vec{a}^2\,\vec{b}^2 \end{cases}$$

falls $(\vec{a}\,\vec{b})^2 = \vec{a}^2\,\vec{b}^2$ ist, sind $\vec{a} \parallel \vec{b}$ und $\vec{a}$ lässt sich durch den Vektor $\vec{b}$ darstellen:

$$\left(\int \mathrm{d}x g(x) h^*(x) \right)^2 \leq \int_a^b \mathrm{d}x g(x) g^*(x) \int_a^b \mathrm{d}x h(x) h^*(x)$$

$$\int_a^b \mathrm{d}x (g(x) - \lambda h(x))^2 = \int_a^b \mathrm{d}x g(x) g^*(x) - 2\lambda \int_a^b \mathrm{d}x g(x) h^*(x) + \lambda^2 \int_a^b \mathrm{d}x h(x) h^*(x)$$

dann gleiches Argument

Mögliche Wahlen von orthonormalen Systemen:
$\triangle\phi = \text{const.}\phi$
Sinus (ungerade) und Konsinus (gerade):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \sin(nx) \sin(mx) = \delta_{mn}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \cos(nx) \cos(mx) = \delta_{mn}$$

$\implies$ orthonormale Funktionen:

$$u_m(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(mx)$$

$$v_m(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(mx)$$

Man erhält die Fourier-Reihe

$$\implies g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1} a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{d}x' g(x') \cos(mx')$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{d}x' g(x') \sin(mx')$$

Kontinuumslimit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp(ikx) \exp(ik'x)^* = \delta_D(k - k') \delta_D(x - x') \qquad = \sum_i u_i(x) u_i^*(x')$$

$$\text{Wellen} \sum_n \cos(nx) \cos(nx') = \delta_D(x - x')$$

$$\sum_n \exp(inx) \exp(inx') = \delta_D(x - x')$$

X.2. Kugelflächenfunktionen (spherical harmonics)

$\triangle$ in Kugelkoordinaten (in 3D), Laplace-Gleichung: $\triangle\phi = 0$:

$$\triangle\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \phi$$

Separation der Variablen

$$\phi(r,\theta,\varphi) = R(r)\cdot Y(\theta,\varphi)$$

Radialteil:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = \lambda R$$

Lösungen:

$$R(r) = Ar^{\lambda} + Br^{-(1+\lambda)}$$

Winkelteil:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}Y = \lambda Y$$

Separation:

$$Y(\theta,\varphi) = P(\theta)Q(\varphi)$$

in φ-Richtung, harmonische Differentialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\theta^2} = -m^2Q$$

in θ-Richtung

$$\lambda\sin^2\theta + \frac{\sin\theta}{P}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right) = m^2$$

Wellen in φ-Richtung, Periodizität 2π

$$\implies Q(\varphi) \sim \exp(\pm im\varphi)$$

λ muss gleich $l(l+1)$ mit $l \geq |m|$ sein, damit Lösungen für P existieren. Substitution $\mu = \cos\theta \to$ Legendre-Differentialgleichung

$$\implies 0 = \left(1-\mu^2\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\mu^2}\underbrace{P_{lm}(\mu)}_{\text{assoziirte Legendre Polynome}} - 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}P_{lm}(\mu) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right)P_{lm}(\mu)$$

Zusammensetzen der Winkellösung

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\underbrace{P_{lm}\cos(\theta)}_{=P}\underbrace{\exp(-im\varphi)}_{=Q}$$

$$\text{mit} \int \mathrm{d}\Omega Y_{lm}Y_{l'm'} = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

Teil B.
Fortsetzung Potentialtheorie

B.10. Helmholtz-Zerlegung

$\vec{X} = -\nabla\psi + \mathrm{rot}\,\vec{Q} \sim$ allgemeine Darstellung eines Vektorfelds $\vec{X}$, mit

$$\begin{aligned}
\psi &= \frac{1}{4\pi}\int_V \mathrm{d}^3 r' \frac{\nabla' X(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} \mathrm{d}\,\vec{S}\,' \frac{\vec{X}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\
\vec{Q} &= \frac{1}{4\pi}\int_V \mathrm{d}^3 r' \frac{\nabla' \times \vec{X}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} \mathrm{d}\,\vec{S}\,' \times \frac{\vec{X}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}
\end{aligned}$$

falls $\vec{X}$ schneller als $1/r$ gegen Null strebt:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} \mathrm{d}\,\vec{S}\,' \times \frac{\vec{X}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \to 0$$

Greenfunktion von $\triangle$:

$$\begin{aligned}
\triangle \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} &= -4\pi\delta_D\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)\vec{X}(\vec{r}) \\
\triangle\vec{A} &= \nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right) - \nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right) \\
\to \vec{X}(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi}\left(\nabla\,\mathrm{div}\int_V \mathrm{d}^3 r' \frac{\vec{X}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\int_V \mathrm{d}^3 r' \frac{\vec{X}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right. \\
&= -\frac{1}{4\pi}\left(\nabla\int_V \mathrm{d}^3 r'\,\vec{X}\left(\vec{r}\,'\right)\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \mathrm{rot}\int_V \mathrm{d}^3 r'\,\vec{X}\left(\vec{r}\,'\right)\right.
\end{aligned}$$

Umschreiben von ∇:

$$\begin{aligned}
\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} &= \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\
\to \vec{X}(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi}\left(-\nabla\int_V \mathrm{d}^3 r'\,\vec{X}\left(\vec{r}\,'\right)\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \mathrm{rot}\int_V \mathrm{d}^3 r'\,\vec{X}\left(\vec{r}\right.\right. \\
\mathrm{div}\left(\varphi\vec{X}\right) &= \nabla\varphi\vec{X} + \varphi\,\mathrm{div}\,\vec{X} \\
\mathrm{rot}\left(\varphi\vec{X}\right) &= \nabla\varphi\times\vec{X} + \varphi\,\mathrm{rot}\,\vec{X} = -\vec{X}\times\nabla\varphi + \varphi\,\mathrm{rot}\,\vec{X} \\
\to \vec{X}(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi}\left(-\nabla\left(-\int_V \mathrm{d}^3 r'\nabla'\frac{\vec{X}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \int_V \mathrm{d}^3 r'\frac{\nabla'\cdot\vec{X}(\vec{r}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right.\right. \\
&\qquad \left.+\,\mathrm{rot}\left(\int_V \mathrm{d}^3 r'\nabla'\times\frac{\vec{X}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \int_V \mathrm{d}^3 r'\frac{\nabla'\times\vec{X}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{4\pi}\left(-\nabla\left(-\underbrace{\int_{\partial V}\mathrm{d}\,\vec{S}\,'\frac{\vec{X}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{\to 0} - \int_V \mathrm{d}^3 r'\frac{\nabla'\cdot\vec{X}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\right. \\
&\qquad \left.+\,\mathrm{rot}\left(\underbrace{\int_{\partial V}\mathrm{d}\,\vec{S}\,'\times\frac{\vec{X}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{\to 0} - \int_V \mathrm{d}^3 r'\frac{\nabla'\times\vec{X}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\right)
\end{aligned}$$

Die Terme gehen gegen null, weil die Felder in der Elektrodynamik schnell genug abfallen (Fläche $\sim r^2$, Feld $\sim 1/r^2$, mit $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$: $\sim 1/r^3$)

$$= -\nabla \underbrace{\left(\frac{1}{4\pi} + \int_V \mathrm{d}^3 r' \frac{\nabla' \cdot \vec{X}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{S}' \frac{\vec{X}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)}_{=\psi(\vec{r})}$$

$$+ \operatorname{rot} \underbrace{\left(\frac{1}{4\pi} \int_V \mathrm{d}^3 r' \frac{\nabla' \times \vec{X}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{S}' \times \frac{\vec{X}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)}_{=\vec{Q}(\vec{r})}$$

$$\rightarrow \vec{X} = -\nabla\psi + \operatorname{rot} \vec{Q}$$

Maxwell-Gleichung für eine statische Situation, also $\partial_{ct}(\ldots) = 0$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho \\
\operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\
\operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \\
\operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}
\end{aligned}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \left(-\nabla \int_V \mathrm{d}^3 r' \frac{\overbrace{\operatorname{div}' \vec{E}'}^{=4\pi\rho}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \operatorname{rot} \int_V \mathrm{d}^3 r' \frac{\overbrace{\operatorname{rot}' \vec{E}'}^{=0}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) = -$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \left(-\nabla \int_V \mathrm{d}^3 r' \frac{\overbrace{\operatorname{div}' \vec{B}'}^{=0}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \operatorname{rot} \int_V \mathrm{d}^3 r' \frac{\overbrace{\operatorname{rot}' \vec{B}'}^{=\frac{4\pi}{c}\vec{j}}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) = \mathrm{r}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \vec{E} &= -\nabla\phi \\
\vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A}
\end{aligned}$$

mit Vektorpotenzial $\vec{A}$:

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

und Potenzial ϕ:

$$\phi = \int_V \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

B.11. Biot-Savart-Gesetz

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{c} \int_V \mathrm{d}^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

und gleichzeitig

$$\triangle \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

als Umkehrung, da

$$\text{rot } \vec{B} = \text{rot rot } \vec{A} = \nabla \text{ div } \vec{A} - \triangle \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Wenn div $\vec{A} = 0$, dann komplette Symmetrie zu ϕ:

$$\begin{aligned}
\triangle \vec{A} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \\
\triangle \phi &= -4\pi\rho \\
\vec{A} &= \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3r' \frac{\vec{j}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\
\phi &= \int \mathrm{d}^3r' \frac{\rho'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Eichtransformation: $\vec{B}$ ändert sich nicht, falls $\vec{A} \to \vec{A} + \nabla\chi, \chi \sim$ Eichfeld

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \to \text{rot}\Big(\vec{A} + \nabla\chi\Big) = \text{rot}\Big(\vec{A} + \text{rot } \nabla\chi\Big) = \text{rot } \vec{A} = \vec{B}$$

Wahl von χ:

$$\text{div } \vec{A} \to \text{div}\Big(\vec{A} + \nabla\chi\Big) = \text{div } \vec{A} + \triangle\chi \stackrel{!}{=} 0$$

$\Longrightarrow$ wähle $\triangle\chi = -\text{ div } \vec{A}$

$$\begin{aligned}
\text{rot } \vec{B} &= \text{rot rot } \vec{A} = \nabla \text{ div } \vec{A} - \triangle \vec{A} = \nabla \text{ div}\Big(\vec{A} + \nabla\chi\Big) - \triangle\Big(\vec{A} + \nabla\chi\Big) \\
&= \nabla \text{ div } \vec{A} + \nabla \text{ div } \nabla\chi - \triangle \vec{A} - \nabla \triangle\chi = \nabla \text{ div } \vec{A} - \triangle \vec{A} = \text{rot } \vec{B} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \triangle\nabla\chi = \nabla \triangle\chi
\end{aligned}$$

Warum ist das möglich? $\triangle\chi = -\text{ div } \vec{A}$ hat eine eindeutige Lösung als Potenzialgleichung, wegen des 1. Green-Theorems.
Wahl von div $\vec{A} = 0$: Coulomb-Eichung, physikalische Bedeutung:

$$\begin{aligned}
\text{div } \vec{A} &= \text{div } \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3r' \frac{\vec{j}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{c} \int_V \mathrm{d}^3r' \, \vec{j}' \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{1}{c} \int_V \mathrm{d}^3r' \, \vec{j}' \nabla' \frac{1}{\vec{r} - \vec{r}'} \\
&= \frac{1}{c} \int_V \mathrm{d}^3r' \frac{\nabla' \vec{j}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{1}{c} \int_V \mathrm{d}^3r' \frac{\partial_t \rho'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{1}{c} \partial_t \int_V \mathrm{d}^3r' \frac{\rho'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\partial_{ct}\phi
\end{aligned}$$

falls div $\vec{A} = 0$ gewählt wird, ist das elektirsche Potenzial konstant als Folge aus der Kontinuität der Ladung.
zeitabhängige Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\text{div } \vec{E} &= 4\pi\rho \\
\text{div } \vec{B} &= 0 \\
\text{rot } \vec{E} &= -\partial_{ct} \vec{B} \\
\text{rot } \vec{B} &= \partial_{ct} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}
\end{aligned}$$

$\to$ $\vec{B}$ ist ein reines Wirbelfeld, $\vec{B} = \text{rot}\ \vec{A} \to$ Substitution in die Helmholtz-Zerlegung:

$$\vec{E} = \underbrace{-\nabla \frac{1}{4\pi}\int_V \mathrm{d}^3r' \frac{\text{div}'\ \vec{E}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{=\phi} + \text{rot}\ \frac{1}{4\pi}\int_V \mathrm{d}^3r' \frac{\overbrace{\text{rot}'\ \vec{E}'}^{-\partial_{ct}\vec{B}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{B} = -\nabla \frac{1}{4\pi}\int_V \mathrm{d}^3r' \frac{\overbrace{\text{div}'\ \vec{B}'}^{=0}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \text{rot}\ \frac{1}{4\pi}\int_V \mathrm{d}^3r' \frac{\overbrace{\text{rot}'\ \vec{B}'}^{=\partial_{ct}\vec{E}'+\frac{4\pi}{c}\vec{j}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

zwei Effekte: $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind gekoppelt und $\vec{B}$ ist immernoch ein reines Wirbelfeld

$$\vec{B} = \text{rot}\ \frac{1}{4\pi}\int_V \mathrm{d}^3r' \frac{\text{rot}'\,\text{rot}'\ \vec{A}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \underset{\downarrow}{=} -\text{rot}\ \frac{1}{4\pi}\int_V \mathrm{d}^3r' \frac{\triangle'\vec{A}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \overset{\uparrow}{=} \text{rot}\ \frac{1}{c}\int_V \mathrm{d}^3r' \frac{\vec{j}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \text{rot}\ \vec{A}$$

$\triangle\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$ in Coulomb-Eichung

$\text{rot}'\,\text{rot}'\ \vec{A} = \nabla'\,\text{div}'\ \vec{A}' - \triangle'\vec{A}' = -\triangle'\vec{A}'$, mit Coulomb-Eichung

immerhin sind $\vec{B}$ und $\vec{A}$ konsistent zueinander, selbst wenn die Felder zeitabhängig sind.

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\nabla\phi + \text{rot}\ \frac{1}{4\pi}\int_V \mathrm{d}^3r' \frac{\text{rot}'\ \vec{E}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\nabla\phi - \text{rot}\ \frac{1}{4\pi}\int_V \mathrm{d}^3r' \frac{\partial_{ct}\vec{B}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\
&= -\nabla\phi - \frac{\partial_{ct}}{4\pi}\int_V \mathrm{d}^3r' \frac{\text{rot}\ \vec{B}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \underset{\downarrow}{=} -\nabla\phi - \frac{\partial_{ct}}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\text{rot}'\ \vec{B}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}
\end{aligned}$$

$$\int \mathrm{d}^3r' \tfrac{\text{rot}\ \vec{B}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\int \mathrm{d}^3r'\,\vec{B}' \times \nabla\tfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int \mathrm{d}^3r' \tfrac{\text{rot}'\ \vec{B}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= -\nabla\phi - \frac{\partial_{ct}}{4\pi}\int_V \mathrm{d}^3r' \frac{\text{rot}'\,\text{rot}'\ \vec{A}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \underset{\downarrow}{=} -\nabla\phi - \partial_{ct}\underbrace{\int_V \mathrm{d}^3r' \frac{\vec{j}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{=\vec{A}} = -\nabla\phi - \partial_{ct}\vec{A}$$

$$\text{rot}'\,\text{rot}'\ \vec{A} = -\triangle\vec{a}' = \tfrac{4\pi}{c}\vec{j}'$$

$$\begin{aligned}
\to\ \vec{B} &= \text{rot}\ \vec{A} \\
\vec{E} &= -\nabla\phi - \partial_{ct}\vec{A}
\end{aligned}$$

Rechnung: in Coulomb-Eichung, aber die Wahl der Eichung beeinflusst die Felder nicht.

B.12. Potenziale und Eichung → allgemeiner Form

$$\left.\begin{aligned} \text{div}\ \vec{B} &= 0 \\ \text{rot}\ \vec{E} + \partial_{ct}\vec{B} &= 0 \end{aligned}\right\}\ \text{homogene Maxwell Gleichungen}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{div}\ \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \text{rot}\ \vec{B} - \partial_{ct}\vec{E} &= \tfrac{4\pi}{c}\vec{j} \end{aligned}\right\}\ \text{inhomogene Maxwell Gleichungen}$$

Aus den 2 homogenen Maxwell-Gleichungen:

$$\text{div}\ \vec{B} = 0 \to \vec{B} = \text{rot}\ \vec{A}$$

$$\text{rot}\ \vec{E} + \partial_{ct}\vec{B} = 0 \to \text{rot}\Big(\vec{E} + \partial_{ct}\vec{A}\Big) = 0 \to \vec{E} + \partial_{ct}\vec{A} = -\nabla\phi$$

Aus den 2 inhomogenen Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned}\text{div }\vec{E} &= \text{div}\Big(-\nabla\phi - \partial_{ct}\vec{A}\Big) = -\triangle\phi - \partial_{ct}\,\text{div }\vec{A} = 4\pi\rho \\ \text{rot }\vec{B} &= \text{rot rot }\vec{A} = \partial_{ct}\Big(-\nabla\phi - \partial_{ct}\vec{A}\Big) + \frac{4\pi}{c}\vec{j}\end{aligned}$$

$$\implies \triangle\phi + \partial_{ct}\,\text{div }\vec{A} = -4\pi\rho$$

$$\triangle\vec{A} - \partial_{ct}^2\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \nabla\Big(\text{div }\vec{A} + \partial_{ct}\phi\Big)$$

$\implies$ gekoppelte Gleichungen, Entkopplung durch Eichung!

$$\begin{aligned}&\vec{B} = \text{rot }\vec{A}\text{ unverändert, falls }\vec{A} \to \vec{A} + \nabla\chi\text{, weil rot }\nabla\chi = 0 \\ &\vec{E} = -\nabla\phi - \partial_{ct}\vec{A}\text{ impliziert, dass }\phi \to \phi - \partial_{ct}\chi \\ &\vec{E} \to -\nabla(\phi - \partial_{ct}\chi) - \partial_{ct}\Big(\vec{A} + \nabla\chi\Big) = -\nabla\phi - \partial_{ct}\vec{A} = \vec{E}\end{aligned}$$

Wahl der Eichung zum Entkoppeln der Gleichungen

$$\text{div }\vec{A} + \partial_{ct}\phi = 0 \qquad \text{(Lorenz-Eichung)}$$

$$\begin{aligned}\triangle\phi - \partial_{ct}^2\phi &= -4\pi\rho \\ \triangle\vec{A} - \partial_{ct}^2 A &= -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\end{aligned}$$

B.13. elektromagnetische Wellen

$$\begin{aligned}\triangle\phi - \partial_{ct}^2\phi &= (\nabla - \partial_{ct})(\nabla + \partial_{ct})\phi = -4\pi\rho \\ \triangle\vec{A} - \partial_{ct}^2\vec{A} &= (\nabla - \partial_{ct})(\nabla + \partial_{ct})\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\end{aligned}$$

im Vakuum: $\rho = 0,\ \vec{j} = 0$

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_0\exp\Big(\pm i\Big(\vec{k}\vec{x} - \omega t\Big)\Big) \\ \to \nabla\phi &= \pm i\vec{k}\phi \\ \triangle\phi &= -\vec{k}^2 \\ \partial_{ct}\phi &= \mp i\frac{\omega}{c}\phi \\ \partial_{ct}^2\phi &= -\frac{\omega^2}{c^2}\phi \\ \triangle\phi - \partial_{ct}^2\phi = 0 &= \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\phi \to \omega = \pm ck\end{aligned}$$

analog für

$$\vec{A} = \vec{A}_0\exp\Big(\pm i\Big(\vec{k}\vec{x} - \omega t\Big)\Big)$$

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit:

$$c_{ph} = \frac{\omega}{k} = c = \frac{\partial\omega}{\partial k} = c_{gr}$$

$\rightarrow$ identisch, keine Dispersion.

$$\triangle\phi + \partial_{ct}\,\mathrm{div}\,\vec{A} = -4\pi\rho$$
$$\triangle\vec{A} - \partial_{ct}^2\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \nabla\Big(\mathrm{div}\,\vec{A} + \partial_{ct}\phi\Big)$$

Coulomb-Eichbedingung:

$$\triangle\phi = -4\pi\rho$$
$$\triangle\vec{A} - \partial_{ct}^2\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \nabla\partial_{ct}\phi$$

neue Quelle für $\vec{A}$: $\partial_{ct}\nabla\phi = -\vec{E}$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \pm i\,\underbrace{\vec{k}\,\vec{A}_0}_{=0}\exp\Big(\pm i\Big(\vec{k}\,\vec{x} - \omega t\Big)\Big) = 0$$

$\rightarrow$ $\vec{A}$ steht (in Coulomb-Eichung) senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung: „transversale Eichung“
$\rightarrow$ ϕ wird tatsächlich dann durch die Ladungsverteilung ρ instantan erzeugt.

Teil C.
elektromagnetische Wellen

C.1. Wellen im Vakuum: $\rho = 0, \vec{j} = 0, \varepsilon = \mu = 1$

$\to$ div $\vec{E} = 0$, div $\vec{B} = 0$, rot $\vec{E} = -\partial_{ct}\vec{B}$, rot $\vec{B} = \partial_{ct}\vec{E}$ eine Dualität $\vec{E} \to \vec{B}$ und $\vec{B} \to -\vec{E}$ im Vakuum lässt die Maxwell-Gleichnugen invariant.

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \underbrace{\nabla \operatorname{div}\vec{E}}_{=0} - \triangle\vec{E} = -\partial_{ct}\underbrace{\operatorname{rot}\vec{B}}_{=\partial_{ct}} = -\partial_{ct}^2\vec{E}$$

$$\to \triangle\vec{E} - \partial_{ct}^2\vec{E} = 0$$

$$\text{analog für } \vec{B}\text{:} \quad \triangle\vec{B} - \partial_{ct}^2\vec{B} = 0$$

Lösung: mache Ansatz

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\Big(\pm i\Big(\vec{k}\vec{x} - \omega t\Big)\Big)$$

$$\to \vec{E} = -k^2\vec{E}$$

$$\partial_{ct}^2\vec{E} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\vec{E}$$

$$\triangle\vec{E} - \partial_{ct}^2\vec{E} = \left(-k^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right)\vec{E} = 0 \to c|k| = \pm\omega$$

Dispersionsfreiheit:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = c$$

$$v_{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = c$$

$$\to v_{ph}v_{gr} = c^2$$

Flächen gleicher Phase:

$$kx - \omega t = k\Big(x - \frac{\omega}{k}t\Big) = k(x - ct) = \text{const. falls } x - ct = \text{const.}$$

elektromagnetische Wellen sind transversal:

aus dem Gauß-Gesetz

$$\operatorname{div}\vec{E} = \vec{k}\vec{E} = 0 \implies \vec{k} \perp \vec{E}$$

genauso aus der 2. Maxwell-Gleichung

$$\operatorname{div}\vec{B} = \vec{k}\vec{E} = 0 \implies \vec{k} \perp \vec{B}$$

$\vec{E}$ und $\vec{B}$-Felder sind gleichphasig

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{k} \times \vec{E} = -\partial_{ct}\vec{B} \implies \vec{E} \perp \vec{B}$$

$\to$ $\vec{k}$, $\vec{B}_0$ und $\vec{E}_0$ bilden ein Rechtssystem + $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind gleichphasig.
Wie schaut das für die Potenziale aus?

$$\rho = 0, \vec{q} = 0$$

$$\phi = \phi_0 \exp\Big(\pm i\Big(\vec{k}\vec{x} - \omega t\Big)\Big)$$

$$\to (\triangle - \partial_{ct}^2)\phi = \left(-k^2 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2\right)\phi = 0 \quad \text{alles ist völlig analog}$$

C.2. Polarisation

Superposition von 2 ebenen Wellen **ohne** Phasenverschiebung $\rightarrow$ lineare Polarisation:

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{\varepsilon}_1 \exp\Big(i\Big(\vec{k}\vec{x} - \omega t\Big)\Big)\\ \vec{E}_2 &= \vec{\varepsilon}_2 \exp\Big(i\Big(\vec{k}\vec{x} - \omega t\Big)\Big)\end{aligned}\right\} \rightarrow \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2)\exp\Big(i\Big(\vec{k}\vec{x} - \omega t\Big)\Big)$$

Superposition von 2 ebenen Wellen **mit** Phasenverschiebung $\rightarrow$ zirkulare Polarisation

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{\varepsilon}_1 \exp\Big(i\Big(\vec{k}\vec{x} - \omega t\Big)\Big)\\ \vec{E}_2 &= \vec{\varepsilon}_2 \exp\Big(i\Big(\vec{k}\vec{x} - \omega t - \varphi_0\Big)\Big)\end{aligned}\right\} \rightarrow \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (\vec{\varepsilon}_1 + i\vec{\varepsilon}_2)\exp\Big(i\Big(\vec{k}\vec{x} - \omega t\Big)\Big)$$

falls $\varphi_0 = \pi/2$: $\exp(i\pi/2) = i$

C.3. Energietransport durch das elektrische Feld

$$\begin{cases}\text{rot}\,\vec{E} = -\partial_{ct}\vec{B}\\ \text{rot}\,\vec{B} = \partial_{ct}\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\text{div}\Big(\vec{E}\times\vec{B}\Big) &= \vec{B}\,\text{rot}\,\vec{E} - E\,\text{rot}\,\vec{B}\\ \vec{E}\,\text{rot}\,\vec{B} &= \vec{B}\,\text{rot}\,\vec{E} - \frac{4\pi}{c}\vec{j}\vec{E} + \vec{E}\partial_{ct}\vec{E} + \vec{B}\partial_{ct}\vec{B}\\ \underbrace{\frac{c}{4\pi}\,\text{div}\Big(\vec{E}\times\vec{B}\Big)}_{\text{Energiefluss}} + \underbrace{\vec{j}\vec{E}}_{\text{Ohm}} &= -\frac{1}{8\pi}\partial_t\Big(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\Big)\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}W_{el} &= \frac{\vec{E}^2}{8\pi} = \frac{1}{2}\rho\phi = \frac{1}{8\pi}\phi\,\triangle\phi\\ W_{mag} &= \frac{\vec{B}^2}{8\pi}\end{aligned}$$

$$\rightarrow \underbrace{\frac{c}{4\pi}\,\text{div}\Big(\vec{E}\times\vec{B}\Big)}_{\text{Energiefluess}} + \overbrace{\vec{j}\vec{E}}^{\text{Ohm-Arbeit}} = \underbrace{-\partial_t(W_{el} + W_{mag})}_{\text{Änderung der Energiedichte}}$$

Poynting-Vektor $\sim$ Energieflussdichte

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}$$

ebene Welle: $\vec{S}\parallel\vec{k}$, $\vec{k}$ steht senkrecht auf $\vec{E}$ und $\vec{B}$
Ohm-Arbeit $\sim$ Arbeit, die das Feld an der Stromdichte verrichtet: $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ (Ohm-Gesetz mit Leitfähigkeit σ)

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow\ \vec{j}\vec{E} = \sigma\vec{E}^2\\ &\int_V \mathrm{d}^3r\,\vec{j}\vec{E} = \sigma\int_V \mathrm{d}^3r\,\vec{E}^2 = \sigma E^2\Delta V = \sigma E^2 A\frac{l^2}{l} = \frac{\sigma A}{l}(El)^2 = \frac{U^2}{R}\end{aligned}$$

Erhaltungsgleichung „Poynting-Satz"

$$\underbrace{\int_{\partial V}\mathrm{d}\vec{A}\,\vec{S}}_{\text{Energietransport durch }\partial V} = \overbrace{\int_V \mathrm{d}^3r\,\vec{j}\vec{E}}^{\text{Ohm-Arbeit in }V} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}^3r(W_{el} + W_{mag})}_{\text{Änderung der Feldenergie in }V}$$

C.4. Implustransport durch das elektromagnetische Feld

$$\vec{F} = q\vec{e} + \frac{1}{c}\nabla \times \vec{B}$$

Integriere über kleines Volumen, um die Lorentz-Kraftdichte $\vec{f}$ zu erhalten

$$\begin{aligned}
&\to \vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j} \times \vec{B} \\
&\Longrightarrow \vec{F} = \int_V \mathrm{d}r^2 \vec{f} = \int_V \mathrm{d}^3 r \left(\rho \vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j} \times \vec{B}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p} \\
&\to \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4\pi}\int_V \mathrm{d}^3 r \,\mathrm{div}\, \vec{E}\vec{E} + \mathrm{rot}\, \vec{B} \times \vec{B} - \partial_{ct}\vec{E} \times \vec{B} \\
&\partial_{ct}\vec{E} \times \vec{B} = \partial_{ct}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) - \vec{E} \times \partial_{ct}\vec{B} = \partial_{ct}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) - \mathrm{rot}\, \vec{E} \times \vec{E} \\
&\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \int_V \mathrm{d}^3 r \left(\mathrm{div}\, \vec{E}\vec{E} + \mathrm{div}\, \vec{B}\vec{B} + \mathrm{rot}\, \vec{B} \times \vec{B} - \vec{E} \times \mathrm{rot}\, \vec{E} - \partial_{ct}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right)\right) \\
&\to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{p} + \frac{1}{c^2}\int_V \mathrm{d}^3 r\, \vec{S}\right) = \frac{1}{4\pi}\int_V \mathrm{d}^3 r \left(\mathrm{div}\, \vec{E}\vec{E} + \mathrm{div}\, \vec{B}\vec{B} + \mathrm{rot}\, \vec{B} \times \vec{B} + \mathrm{rot}\, \vec{E}\vec{E}\right)
\end{aligned}$$

Kann man das Integral auf der rechten Seite auls Divergenz schreiben?
$\to$ ja: Maxwell-Spannungstensor

$$\begin{aligned}
(\vec{E}\,\mathrm{div}\, \vec{E})_i &= E_i \partial_j E_j \\
(\vec{E} \times \mathrm{rot}\, \vec{E})_i &= \varepsilon_{ijk} E_j \varepsilon_{klm} \partial_l E_m = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} E_j \partial_l E_m = (-\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}) E_j \partial_l E_m \\
&= -E_j \partial_i E_j + E_j \partial_j E_i
\end{aligned}$$

$$\to \left(\mathrm{div}\, \vec{E}\vec{E} + \mathrm{rot}\, \vec{E} \times \vec{E}\right)_i = E_i \partial_j E_j + E_j \partial_j E_i - E_j \partial_i E_j = \partial_j (E_i E_j) - \frac{1}{2}\partial_i (E_j E_j) = \partial_j \left(E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} E_k E_k\right)$$

$$\to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{p} + \frac{1}{c^2}\int_V \mathrm{d}^3 r\, \vec{\rho}\right)_i = \frac{1}{4\pi}\int_V \mathrm{d}^3 r \underset{\text{Divergenz}}{\underset{\downarrow}{\partial_j}} \left(E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(E_k E_k + B_k B_k)\right)$$

Definiere den Maxwell-Spannungstensor T_{ij}:

$$\begin{aligned}
T_{ij} &= \left(E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(E_k E_k + B_k B_k)\right) \\
\mathrm{tr}(T_{ij}) &= \sum_i T_{ii} = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 - \frac{3}{2}\left(\vec{E}^2 \vec{B}^2\right)\right) = \frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi} = -\frac{\vec{E} + \vec{B}}{8\pi} = -(W_{el} + W_{mag}) \\
W_{el} + W_{mag} + \mathrm{tr}(T_{ij}) &= 0 = T^\mu_\mu \\
\to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p_i + \frac{1}{c^2}\int \mathrm{d}^3 r S_i\right) &= \int_V \mathrm{d}^3 r \partial_j T_{ij} = \int_{\partial V} \sum_j \mathrm{d}A_j T_{ij}
\end{aligned}$$

$\mathrm{d}A_j T_{ij}$: Kraft auf ein Oberflächenelement $\mathrm{d}A_j \implies T_{ij}$ muss sich wie ein „Druck“ verhalten $\to$ Analogie zur Fluidmechanik.

C.5. Elektromagnetische Wellen in Materie

$$\begin{aligned}
\vec{D} &= \varepsilon\,\vec{E} \\
\vec{B} &= \mu\,\vec{H} \\
\vec{j} &= \sigma\,\vec{E} \\
\text{rot}\,H &= \partial_{ct}\,\vec{D} + \frac{4\pi}{c}\left(\vec{\sigma}\,\vec{E}\right) \\
\text{rot}\ \vec{E} &= -\mu\partial_{ct}\,\vec{H} \\
\text{div}\ \vec{H} &= 0 \\
\text{div}\ \vec{E} &= 0 \\
\rightarrow \text{rot}\,\text{rot}\ \vec{H} &= \nabla\,\text{div}\ \vec{H} - \triangle\,\vec{H} = \varepsilon\mu\partial_{ct}^2\,\vec{H} \\
\rightarrow \text{rot}\,\text{rot}\ \vec{E} &= \nabla\,\text{div}\ \vec{E} - \triangle\,\vec{H} = \varepsilon\mu\partial_{ct}^2\,\vec{E} \\
\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\partial_t^2 &= \frac{1}{c'^2}\partial_t^2
\end{aligned}$$

man erhält eine effektive Ausbreitungsgeschwindigkeit c':

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

definiere Brechungsindex n:

$$n = \frac{c}{c'} = \sqrt{\varepsilon\mu} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{wenn } \mu \text{ fast immer } \approx 1 \text{ ist}}}{\approx} \sqrt{\varepsilon}$$

man würde erwarten, dass ε und μ frequenzabhängig sind, die molekularen Dipole benögitgen eine gewisse Zeit um sich auszurichten: Wasser: $\varepsilon \approx 81$, aber $n \simeq 1.3$ für optisches Licht.

für $\sigma \neq 0, ebeneWelle:$

$$\begin{aligned}
\text{rot}\,\text{rot}\ \vec{H} &= -\triangle\,\vec{H} = \varepsilon\mu\partial_{ct}^2\,\vec{H} + \frac{4\pi}{c}\mu\sigma\partial_{ct}\,\vec{H},\ \vec{H} = \vec{H}_0\exp\Big(i\Big(\vec{k}\,\vec{x} - \omega t\Big)\Big) \\
\text{rot}\,\text{rot}\ \vec{E} &= -\triangle\,\vec{E} = \varepsilon\mu\partial_{ct}^2\,\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\mu\sigma\partial_{ct}\,\vec{E},\ \vec{E} = \vec{E}_0\exp\Big(i\Big(\vec{k}\,\vec{x} - \omega t\Big)\Big) \\
\rightarrow \text{rot}\ \vec{H} &= -i\varepsilon\frac{\omega}{c}\,\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\sigma\,\vec{E} = -i\left(\varepsilon + \frac{4\pi\sigma}{\omega}i\right)\frac{\omega}{c}\,\vec{E}
\end{aligned}$$

Definiere Permittivität η:

$$\eta := \varepsilon + \frac{4\pi\sigma}{\omega}i$$

Vergleich mit

$$\text{rot}\ \vec{H} = -i\varepsilon\frac{\omega}{c}\,\vec{E}$$

ohne Leitfähigkeit.
Dispersion in Materie-Wellen aus den Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned}
\vec{k} \times \vec{H} &= -\frac{\omega}{c}\eta\vec{E} \\
\vec{k} \times \vec{E} &= \frac{\omega}{c}\eta\vec{H} \\
\vec{k} \cdot \vec{E} &= 0 \\
\vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 \\
\rightarrow \vec{k} \times \vec{k} \times \vec{H} &= \left(\vec{k}\vec{H}\right)\vec{k} - k^2\vec{H} = -\frac{\omega}{c}\eta\vec{k} \times \vec{E} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\eta\vec{H}
\end{aligned}$$

man erhält eine komplexe Dispersionsrelation

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\eta\varepsilon\left(1 + \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}i\right)$$

allgemeiner Ansatze

$$\begin{aligned}
k &= \alpha + i\beta \\
\rightarrow k^2 &= \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta \\
\rightarrow \alpha^2 - \beta^2 &= \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} \\
2\alpha\beta &= \frac{4\pi\sigma}{\omega}\mu\frac{\omega^2}{c^2} \\
\Longrightarrow \alpha &= \frac{1}{2\beta}\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega}\mu\frac{\omega^2}{c^2}\right) \\
\frac{1}{4\beta^2}(\cdot)^2 - \beta^2 &= \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} \\
\Longrightarrow \beta &= \pm\sqrt{\varepsilon\mu}\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}\right) - 1} \\
\Longrightarrow \alpha &= \pm\sqrt{\varepsilon\mu}\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}\right) + 1} \\
k = \alpha + i\beta \rightarrow |k| &= \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{\varepsilon\mu}\frac{\omega}{c}\sqrt[4]{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} \\
\varphi &= \arctan\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2}\left(2\arctan\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\frac{\beta}{\alpha}}{1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}} \\
&= \cdots = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)
\end{aligned}$$

veralgemeinerter Brechungsindex

$$\begin{aligned}
n &= \frac{c}{\omega}\alpha + i\frac{c}{\omega}\beta, k = \alpha + i\beta = \frac{\omega}{c}n = \frac{\omega}{c}(\Re(n) + i\Im(n)) \\
\exp\left(i\left(\vec{k}\vec{x} - \omega t\right)\right) &= \exp\left(i\omega\left(\frac{nx}{c} - t\right)\right) \\
&= \exp\left(i\omega(\Re(n))\frac{x}{c} - t\right)\exp\left(-\frac{\omega}{c}\Im(n)x\right)
\end{aligned}$$

C.6. Wellengleichungen + retardierte Potentiale: Helmholtz Differentialgleichung

Verbindung zwischen Potenzialen ϕ, $\vec{A}$ und Quellen ρ, $\vec{j}$

$$(\triangle \partial_{ct}^2)\phi = -4\pi\rho$$
$$(\triangle \partial_{ct}^2)A = -\frac{4\pi}{c}\vec{q}$$

in Lorenzeichung:

$$\text{div } \vec{A} + \partial_{ct}\phi = 0$$

Definiere neuen Operator: D'Alembert-Operator $\Box = \triangle - \partial_{ct}^2 = (\nabla + \partial_{ct})(\nabla - \partial_{ct})$.

$$\rightarrow \Box\phi = 4\pi\rho$$
$$\Box\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Änderung in r, $\vec{j}$ pflanzt sich mit Geschwindigkeit c fort $\rightarrow$ Potenziale ϕ, $\vec{A}$ können sich im Abstand R erst nach R/c ändert. $\rightarrow$ zeitabhängige Green-Funktion.
Feldgleichungen haben die Form der Helmholtz-Differentialgleichung:

$$(\triangle - \partial_{ct}^2)\underbrace{\psi(\vec{x},t)}_{\text{Potenzial}} = -4\pi\overbrace{Q(\vec{x},t)}^{\text{Quelle}}$$

Fourier-Entwicklung:

$$\begin{aligned}
\psi(\vec{x},t) &= \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\psi(\vec{x},\omega)e^{-i\omega t} \\
Q(\vec{x},t) &= \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}Q(\vec{x},\omega)e^{-i\omega t} \\
(\triangle - \partial_{ct}^2)\psi(\vec{x},t) &= \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}(\triangle - \partial_{ct}^2)\psi(\vec{x},\omega)e^{-i\omega t} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\left(\triangle - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right)\psi(\vec{x},\omega)e^{-i\omega t} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}(-4\pi)Q(\vec{x},\omega)e^{-i\omega t} \\
&= -4\pi Q(\,x,t)
\end{aligned}$$

Man erhält die Helmholtz-Differentialgleichnug

$$\rightarrow \left(\triangle + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right)\psi = -4\pi Q(\vec{x},t)$$

Green-Funktion:

$$(\triangle + k^2)G(\vec{x},\vec{x}') = \delta_D(\vec{x} - \vec{x}')\delta_D(t-t')$$

$\sim$ löst Wellengleichung für eine Punktquelle bei $\vec{x}'$ zur Zeit t'.
Green-Funktion für die Helmholtz-Differentialgleichung:
keine Randbedingungen: $G(\vec{x}, \vec{x}')$ hängtnur von r: $r = |\vec{x} - \vec{x}'|$

$$(\triangle + k^2)G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta_D(\vec{x} - \vec{x}') = (\triangle + k^2)G(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right) + k^2 G = \delta_D(r)$$

$r \neq 0 : \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rG) + k^2(rG) = 0, \quad$ denn:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}r^2}\right) + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rG) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(G + r\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r}\right)$$

Lösung der harmonischen Differenzialgleichnug:

$$rG = a_+\exp(ikr) + a_-\exp(-ikr)$$
$$a_+ + a_- = 1 \to a_- = 1 - a_+$$

für Grenzfall $r \to 0$: $G \sim 1/r$

$$\to G(r) = G(|\vec{x} - \vec{x}'|) = a_+G^+(|\vec{x} - \vec{x}'|) + a_-G^-(|\vec{x} - \vec{x}'|)$$

Falls $r \to 0$:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right) + k^2G = \delta_D(r)$$

Physikalisches Argument: bei kleinen Abständen kann Retardation keine Rolle spielen; die Helmholtz-Differentialgleichung muss in Poisson-Differentialgleichung übergehen.

$$\lim_{kr\ll 1} G(r) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}, \text{ als Lösung von: } \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right) = \delta_D(r)$$
$$\to G^+(|\vec{x} - \vec{x}'|) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\exp(+ik|\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$
$$\to G^-(|\vec{x} - \vec{x}'|) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\exp(-ik|\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

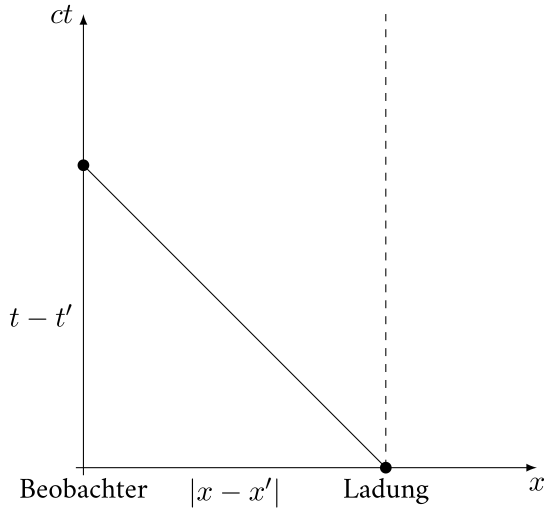
volle Green-Funktion inklusive Zeitabhängigkeit:

$$G(\vec{x}, t, \vec{x}', t') = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} G(\vec{x}, \omega, \vec{x}', t')\exp(-i\omega t)$$
$$(\triangle - \partial_{ct}^2)G = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}(\triangle + k^2)G\exp(-i\omega t) = \delta_D(\vec{x} - \vec{x}')\int\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\exp(-i\omega(t - t'))$$
$$\to (\triangle + k^2)G = \delta_D(\vec{x} - \vec{x}')\exp(+i\omega t')$$
$$\to G^{\pm}(\vec{x}, t, \vec{x}', t') = -\int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\exp\left(-i\omega\left(t - t' \pm \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{c}\right)\right)$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\delta_D\left(t - t' \mp \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)$$
$$\psi^{\pm}(\vec{x}, t') = -4\pi\int \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3x' G^{\pm}(\vec{x}, t, \vec{x}', t')Q(\vec{x}', t)$$

Retardierung:

$$t = t' + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} \text{ für „+“: } t > t'$$
$$\downarrow$$

zusätzliche Zeit, die das Feld von $\vec{x}$ zu $\vec{x}$ benötigt



C.7. Wellenfunktion und retardierte Potenziale: allgemeine Konstruktion

Wellengleichung:

$$(\triangle - \partial_{ct}^2)\psi = -4\pi Q(\vec{x}, t)$$

Green-Funktion für eine Punktquelle an der Stelle $(\vec{x}', t')$

$$(\triangle - \partial_{ct}^2)G(\vec{x}, t, \vec{x}', t') = -4\pi\delta_D(\vec{x} - \vec{x}')\delta_D(t - t')$$

$G(\vec{x}, t, \vec{x}', t')$ hängt nur von den Koordinatenabständen ab:

$$\rho = |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{\rho} = \vec{x} - \vec{x}'$$
$$\tau = t - t'$$

durch Superposition:

$$\psi(x, t) = \int \mathrm{d}^2x' \int \mathrm{d}tG(\vec{x}, t, \vec{x}', t')Q(\vec{x}', t)$$

Darstellung von G und δ im Fourier-Raum:

$$\delta_D(\vec{x} - \vec{x}')\delta_D(t - t') = 4\pi \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \exp\left(i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')\right) \exp(-i\omega(t - t'))$$
$$G(\vec{x}, t, \vec{x}', t') = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} G\left(\vec{k}, \omega\right) \exp\left(i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')\right) \exp(-i\omega(t - t'))$$

mit $\Box G = -4\pi\delta_D$

$$\Box G(\vec{x}, t, \vec{x}', t) = \int \frac{\mathrm{d}^k}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} G\left(\vec{k}, \omega\right)\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \exp\left(i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')\right) \exp(-i\omega t(t - t')) \stackrel{!}{=} -4\pi\delta_D$$
$$\to G\left(\vec{k}, \omega\right) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{c^2}{(ck)^2 + \omega^2} \quad \text{nur definiert, falls } ck \neq \omega$$
$$\to G(\vec{x}, t, \vec{x}', t') = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi^3)} \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \frac{c^2}{(ck - \omega)(ck + \omega)} \exp(ik(\vec{x} - \vec{x}')) \exp(-i\omega(t - t'))$$

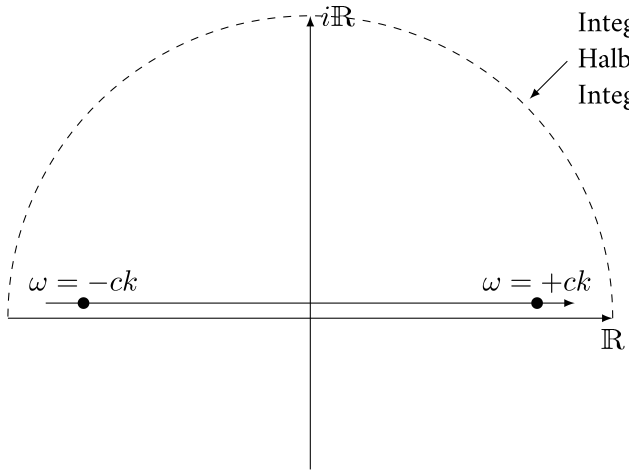
$\int \mathrm{d}\omega$-Integration hat 2 Pole bei $n = \pm ck \to$ analytische Fortsetzung nach $\mathbb{C}$ zum Lösen des $\int \mathrm{d}\omega$ Integrals

- $G\left(\vec{k}, z\right)$ komplex differenzierbar $\sim$ holomorph (z: komplexes ω)
- $\oint_C \mathrm{d}z G(z) = 0$, falls $G \sim$ holomorph + kein Pol von C umschlossen ist.
- Pol erster Ordnung an einer Stelle ξ:

$$\lim_{z \to \xi} G(z)(z - \xi) = \operatorname{Res} G(\xi)$$

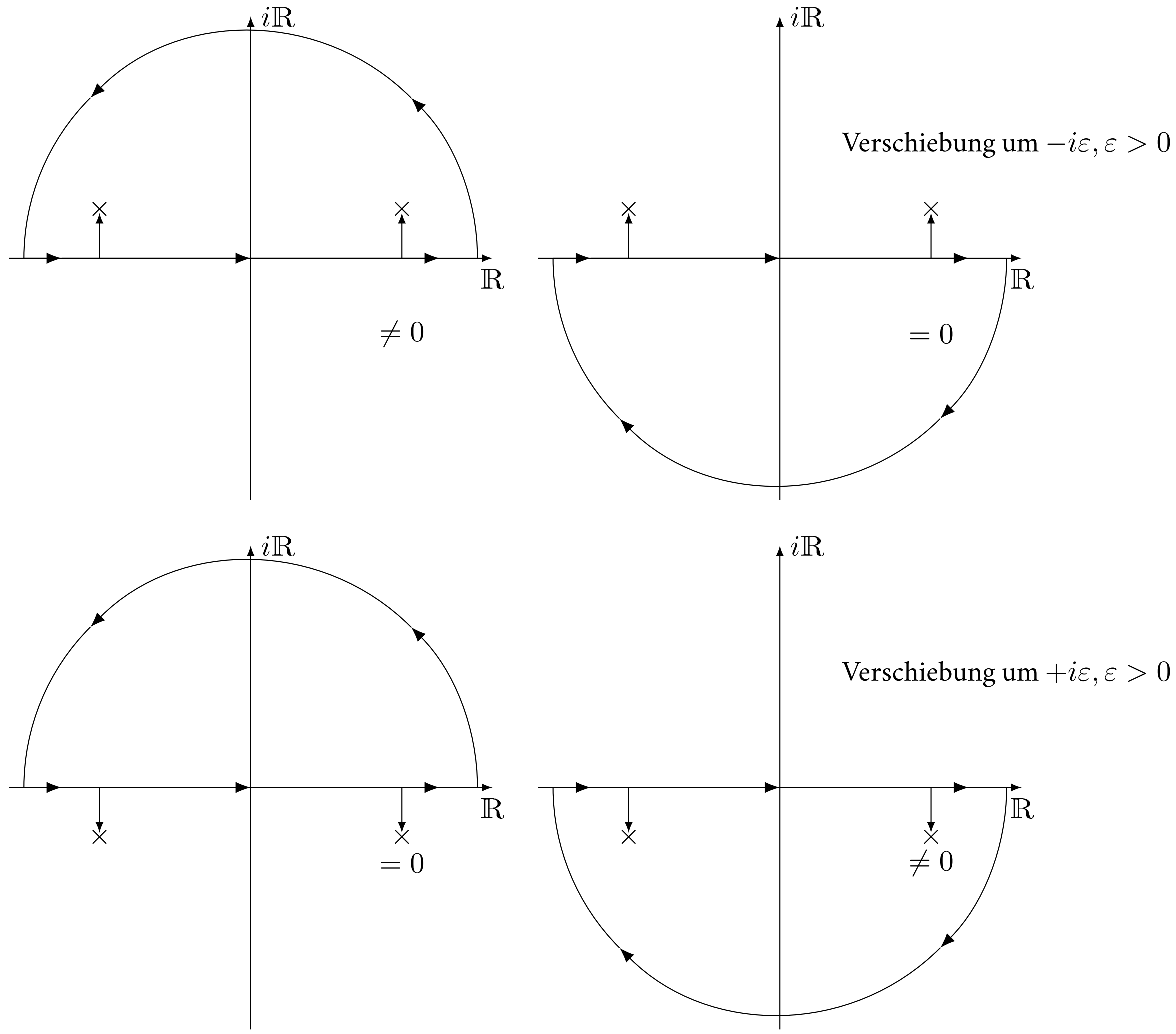
- $\displaystyle\oint_C \mathrm{d}z G(z) = 2\pi i \sum_n \operatorname{Res} G(\xi_n)$ (mit den Polen ξ_n umschlossen von C)

Integration $\int \mathrm{d}\omega$ in der komplexen Ebene



Integration kann durch einen Halbkreis geschlossen werden.
Integrand $\sim 1/\omega^2$ für große ω, Halbkreis $\sim \omega$

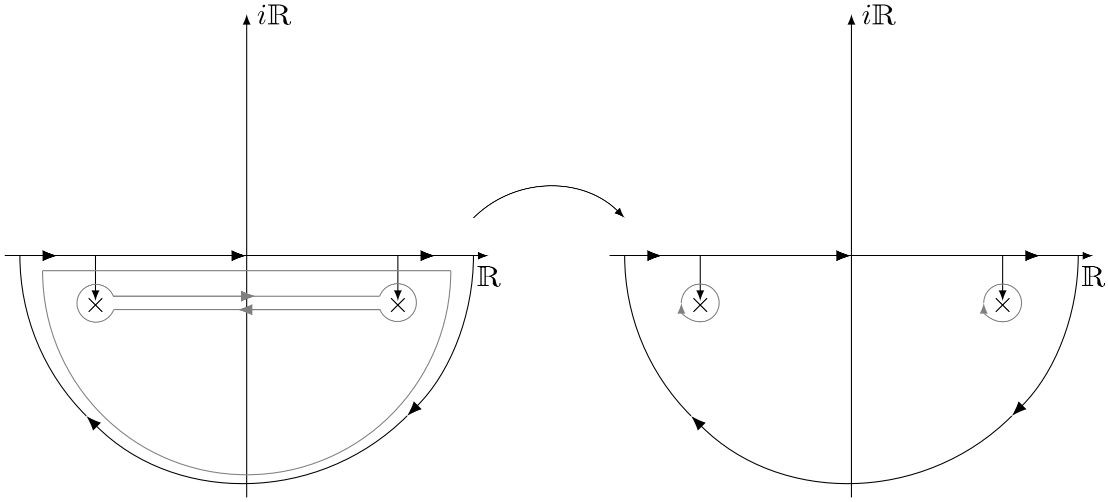
Integrationsweg für $\int \mathrm{d}\omega \ldots$. Möglichkeiten:



1. Integration liefert $= 0$, falls keine Pole umsclossen werden $\rightarrow$ würde den Fall $t < t'$ beschreiben $\rightarrow$ avancierte Potentiale

2. Integration liefert $\neq 0$, falls beide Pole umsclossen werden $\rightarrow$ würde den Fall $t > t'$ beschreiben $\rightarrow$ retardierte Potentiale

Wert der Integration $\sim$ Summe der Residuen: um Holomorphiegebiet kann die Integrationskontur beliebig verformt werden, das Ergebnis hängt nur von den eingeschlossenen Polen ab. Verformung der Integrationskontur:



$$G\big(\vec{x},t,\vec{x}',t'\big) = \frac{c^2}{4\pi}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\frac{\exp\Big(i\vec{k}\rho+i\omega\tau\Big)}{(ck)^2-(\omega+i\varepsilon)^2}$$

Anwendung des Residuensatzes:

$$\begin{aligned} c^2k^2-\omega^2-2i\varepsilon\omega+\varepsilon^2 &= -\big(\omega^2+2i\varepsilon\omega-c^2k^2-\varepsilon^2\big) = -\big(\omega^2+2i\varepsilon ck-c^2k^2-\varepsilon^2\big)\\ &= -(\omega+(ck-i\varepsilon))(\omega-(ck-i\varepsilon))\\ \oint_C\mathrm{d}\omega\frac{\exp(-i\omega\tau)}{c^2k^2-(\omega+i\varepsilon)^2} &= -\oint_C\mathrm{d}\omega\frac{\exp(-i\omega\tau)}{(\omega+(ck-i\varepsilon))(\omega-(ck-i\varepsilon))}\end{aligned}$$

Dies hat zwei Pole: bei $\omega_1 = ck-i\varepsilon$ und $\omega_2=-ck-i\varepsilon$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(\omega_1) &= c^2\exp(-i\omega_1\tau)\lim_{\omega\to\omega_1}\frac{\omega-ck+i\varepsilon}{c^2k^2-(\omega+i\varepsilon)^2}\\ &= c^2\exp(-i\omega_1\tau)\lim_{\omega\to\omega_1}\frac{\omega-ck+i\varepsilon}{(ck+\omega+i\varepsilon)(ck-\omega+i\varepsilon)}\\ &= c^2\exp(-i\omega_1\tau)\lim_{\omega\to\omega_1}\frac{\omega-\omega_1}{2ck(\omega_1-\omega)} = -\frac{c}{2k}\exp(-ick\tau)\text{ mit }\varepsilon\to 0\\ \mathrm{Res}(\omega_2) &= \frac{c}{2k}\exp(+ick\tau)\end{aligned}$$

$$\oint_C\mathrm{d}\omega(\ldots) = -2\pi i(\mathrm{Res}(\omega_1)+\mathrm{Res}(\omega_2)) = -2\pi\Big(-\frac{c}{2k}\exp(-ick\tau)+\frac{c}{2k}\exp(ick\tau)\Big) = \frac{2\pi c}{k}\sin(ck\tau)$$

Zeitabhängige Green-Funktion

$$G(\vec{\rho},\tau) = \begin{cases}0 & t<t'\\ \frac{c}{2\pi^2}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\exp\Big(i\vec{k}\vec{\rho}\Big)\frac{\sin(ck\tau)}{k} & t>t'\end{cases}$$

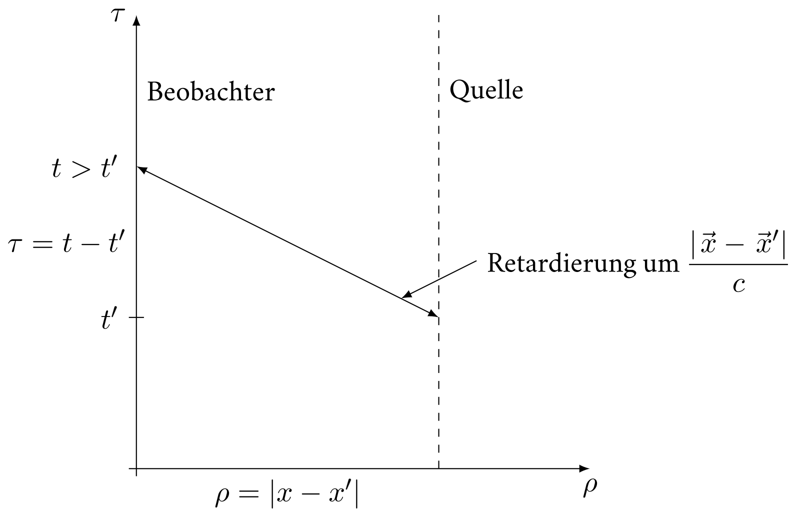
$\int\mathrm{d}^3k$: Integration in Kugelkoordinaten;

$$\mathrm{d}^3k = k^2\mathrm{d}k\mathrm{d}(\cos\theta)\mathrm{d}\varphi, \mu=\cos\theta, \theta=\angle\Big(\vec{k},\vec{\rho}\Big), \vec{k}\cdot\vec{\rho}=k\rho\cos\theta=k\rho\mu, \mathrm{d}\varphi=2\pi$$

$$\begin{aligned}G(\vec{\rho},\tau) &= \frac{c}{\pi}\int k^2\mathrm{d}k\int\mathrm{d}\mu\exp(ik\rho\mu)\frac{\sin(ck\tau)}{k} = \frac{c}{\pi}\int k^2\mathrm{d}k\frac{\sin(ck\tau)}{k}\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\mu\exp(ik\rho\mu)\\ &= \frac{2c}{\pi\rho}\int\mathrm{d}k\sin(ck\tau)\sin(k\rho)\end{aligned}$$

Substitution $x = ck \to \mathrm{d}x = c\mathrm{d}k$

$$
\begin{aligned}
G(\rho,\tau) &= \frac{2}{\pi\rho}\int \mathrm{d}x \sin(x\tau)\sin\Big(\frac{x}{c}\rho\Big) \\
&= \frac{1}{\pi\rho}\int \mathrm{d}x \cos\Big(\tau + \frac{R\rho}{c}\Big)\cos\Big(\tau x - \frac{R\rho}{c}\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi\rho}\int \mathrm{d}x \bigg(\exp\Big(i\Big(\tau - \frac{R}{c}\rho\Big)\Big) + \exp\Big(-i\Big(\tau - \frac{R}{c}\rho\Big)\Big)\bigg) \\
&\quad -\bigg(\exp\Big(i\Big(\tau + \frac{R}{c}\rho\Big)\Big) + \exp\Big(-i\Big(\tau + \frac{R}{c}\rho\Big)\Big)\bigg) \\
&= \frac{1}{\rho}\Bigg(\underset{\substack{\downarrow \\ t - t' - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}}}{\delta_D\Big(\tau - \frac{\rho}{c}\Big)} - \overset{\substack{t + t' + \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c} \\ \uparrow}}{\delta_D\Big(\tau + \frac{\rho}{c}\Big)}\Bigg) \\
G\big(\vec{x},t,\vec{x}',t'\big) &= \frac{1}{|r - r'|}\delta_D\bigg(t - t' - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\bigg) \\
\psi(\vec{x},t) &= \int \mathrm{d}^3x' \int \mathrm{d}t' \frac{Q(\vec{x}',t')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\delta_D\bigg(t - t' - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\bigg)
\end{aligned}
$$



(liefert keinen Beitrag für $t > t'$)

Teil Y.
Differenzienation und Integration komplexer Funktionen

komplexe Funktionen $z = x + iy \to g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$
Stetigkeit: $g(z)$ ist stetig in ξ, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, sodass aus $|z - \xi| < \delta$ folgt $|g(z) - g(\xi)| < \varepsilon$.
Differenzierbarkeit: $g(z)$ ist komplex differenziebar in ξ, falls

$$\lim_{z \to \xi} \frac{g(z) - g(\xi)}{z - \xi}$$

existiert und eideutig ist $\equiv \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}\big|_\xi$. Differenziebarkeit von komplexen Funktionen hat viele Aspekte

- komplex differenziebar: $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}\big|_\xi$ existiert und ist eindeutig
- analytisch: Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen gelten
- regulär: $\oint_C \mathrm{d}z g(z) = 0$ für eine geschlossene Kurve C
- holomorph: $\oint_C \mathrm{d}z \frac{g(z)}{z - \xi} = g(\xi)$

Y.1. Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z} \text{ muss unabhängig von der Richtung von } \Delta z \text{ sein} \\
\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z + \Delta x) - g(z)}{\Delta x} = \frac{\partial g}{\partial x} \\
\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z + i\Delta y) - g(z)}{i\Delta y} = \frac{1}{i}\frac{\partial g}{\partial x}
\end{aligned}$$

mit $g(z) = g(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \\
\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)g &= 0
\end{aligned}$$

Y.2. Linienintegrale

mit Parametrisierung $z(\lambda)$

$$\begin{aligned}
\int_C \mathrm{d}z g(z) &= \int_a^b \mathrm{d}\lambda g(z(\lambda))\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda} \\
\int_{-C} \mathrm{d}z g(z) &= \int_b^a \mathrm{d}\lambda g(z(\lambda))\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda} = -\int_a^b \mathrm{d}\lambda g(z(\lambda))\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda} = -\int_C \mathrm{d}z g(z)
\end{aligned}$$

geschlossene Kurve: $z(\lambda = a) = z(\lambda = b)$. Für analytische Funktionen

$$\oint \mathrm{d}z g(z) = \int_{C_1} \mathrm{d}z g(z) + \int_{-C_2} \mathrm{d}z g(z) = 0$$

geschlossene Integrale $= 0 \iff$ Wegunabhängigkeit $\rightarrow$ Cauchy-Theorem

$$\begin{aligned}\oint \mathrm{d}z g(z) &= \oint (\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)(u + iv)\\ &= \oint (\mathrm{d}xu - \mathrm{d}yv) + i \oint (\mathrm{d}xv + \mathrm{d}yu)\end{aligned}$$

lustiges Argument: Satz von Stokes

$$\vec{R} = (u, -v, 0), \vec{I} = (v, u, 0) \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$$

$$\oint_{\partial S} \mathrm{d}z g(z) = \oint \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{R} + i \oint \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{I}$$

mit 1. Cauchy-Riemann-Differentialgleichnug:

$$\oint \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{R} = \int_S \mathrm{d}\vec{S} \operatorname{rot} \vec{R} = -\int_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

mit 2. Cauchy-Riemann-Differentialgleichnug:

$$\oint \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{I} = \int_S \mathrm{d}\vec{S} \operatorname{rot} \vec{R} = -\int_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

Y.3. Cauchy-Theorem und holomorphe Funktionen

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \mathrm{d}\xi \frac{g(\xi)}{\xi - z}$$

Werte von

$$\frac{g(\xi)}{\xi - z}$$

auf C ausreichend um $g(z)$ zu bestimmen „holomorph“

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \oint_C \mathrm{d}\xi \frac{g(\xi)}{\xi - z} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z) + g(\xi) - g(z)}{\xi - z}\\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \mathrm{d}\xi \frac{g(z)}{\xi - z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_C \mathrm{d}\xi \frac{g(\xi) - g(z)}{\xi - z}\\ &= \frac{g(z)}{2\pi i} \underbrace{\oint_C \mathrm{d}\xi \frac{1}{\xi - z}}_{1.} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_C \mathrm{d}\xi \frac{g(\xi) - g(z)}{\xi - z}}_{2.}\end{aligned}$$

1. Integral: $\xi \rightarrow \xi - z, \mathrm{d}\xi \rightarrow \mathrm{d}(\xi - z)$. Substitution und Integration entlang Einheitskreis

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\lambda \frac{-\sin\lambda + i\cos\lambda}{\cos\lambda + i\sin\lambda} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\lambda \frac{-\sin\lambda + i\cos\lambda}{\cos\lambda + i\sin\lambda} \frac{\cos\lambda - i\sin\lambda}{\cos\lambda - i\sin\lambda}\\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\lambda (-\sin\lambda\cos\lambda + \cos\lambda\sin\lambda) + i\big(\sin^2\lambda + \cos^2\lambda\big) = 2\pi i\end{aligned}$$

2. Integral

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C \mathrm{d}\xi \frac{g(\xi)-g(z)}{\xi - z}\right| &\leq \frac{1}{2\pi i}\left|\oint_C \mathrm{d}\xi \frac{|g(\xi)-g(z)|}{\xi - z}\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi i}\left|\oint_C \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z}\right| = \frac{\varepsilon}{|2\pi i|},\ \text{falls } |g(\xi)-g(z)| < \varepsilon \text{ (Stetigkeit)}\end{aligned}$$

insgesamt erhält man

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \mathrm{d}\xi \frac{g(\xi)}{\xi - z} = \frac{g(z)}{2\pi i}2\pi i + \frac{\varepsilon}{|2\pi i|} = g(z) \text{ falls } \varepsilon \text{ klein genug gewählt wird}$$

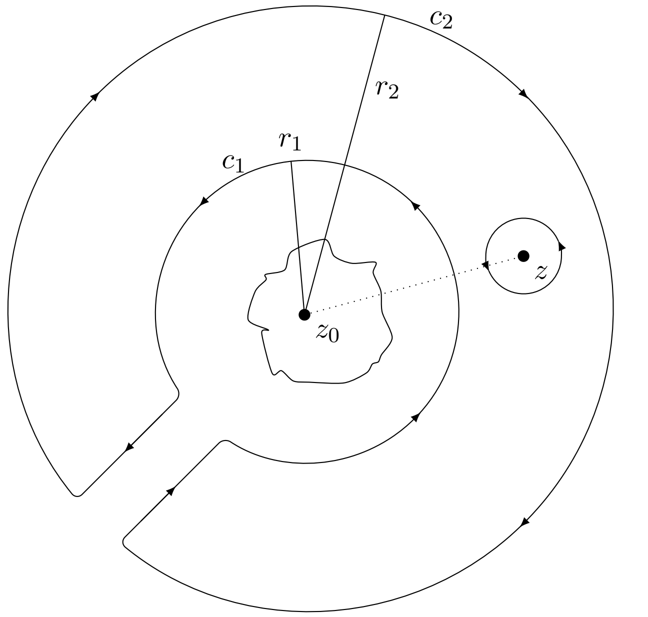
Verallgemeinerung des Cauchy-Theorems durch Induktion

$$\frac{\mathrm{d}^n g}{\mathrm{d}z^n} = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \mathrm{d}\xi \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^n}$$

aus Taylor-Entwicklung

$$g(z) = g(\xi) + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}(z-\xi) + \dots$$

Y.4. Laurent-Reihen - komplexe Potenzreihen



$$r_1 < |z - z_0| \equiv r < v_2$$

umgekehrter Umlaufsinn

$$g(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \mathrm{d}\xi \frac{g(\xi)}{\xi - z}}_{\text{Cauchy-Theorem: } C_2 \text{ enthält } z} \overset{\uparrow}{-} \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \mathrm{d}\xi \frac{g(\xi)}{\xi - z}}_{=0,\, C_1 \text{ enthält } z \text{ nicht, kein Pol}}$$

Konstruktion einer Reihe ausgehend von ξ auf C_1 (1. Integral):

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}} \underset{\downarrow}{=} \frac{1}{\xi - z_0}\sum_n \left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n$$

geometrische Reihe

$$q = \left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| = \frac{r}{r_2} < 1 \to \sum_n q^n = \frac{1}{1-q}$$

Konstruktion einer Reihe ausgehend von ξ auf C_1 (2. Integral)

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{z - z_0}\frac{1}{1-\frac{\xi-z_0}{z-z_0}} = \frac{1}{z - z_0}\sum_n \left(\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)^n$$

wieder geometrische Reihe:

$$q = \left|\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right| = \frac{r_1}{r} < 1 \to \sum_n q^n = \frac{1}{1-q}$$

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \mathrm{d}\xi g(\xi) \sum_n \frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \mathrm{d}\xi g(\xi) \sum_n \frac{(\xi-z_0)^n}{(z-z_0)^{n-1}} \\ &= \sum_n (z-z_0)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \mathrm{d}\xi \frac{g(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}}_{=a_{-(n+1)}} - \sum_n (z-z_0)^{-(n+1)} \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \mathrm{d}\xi g(\xi)(\xi-z_0)^n}_{=a_n} \end{aligned}$$

$$\to g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{Laurent-Reihe}$$

mit den Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \mathrm{d}\xi g(\xi)(\xi-z_0)^{-(n+1)}$$

falls $n = -1$:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \mathrm{d}\xi g(\xi) = \operatorname{Res} g(z_0) \quad \text{„Residuum“}$$

egal ob Integral über C_1 oder C_2, beide enthalten Punkte z_0

$$\to g(z) = -\dots - \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} - \dots - \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots$$

falls die Laurent-Reihe bei einem n abbricht, spricht man von einen Pol der Ordnung n.

Y.5. Residuensatz → Berechnung von a_{-1}

wir nehmen eine Reihe, die bei n abbricht

$$\begin{aligned}
g(z) &= -\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} - \dots - \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots \\
g(z)(z-z_0)^n &= -a_n - \dots - a_{-1}(z-z_0)^{n-1} + a_0(z-z_0) + \dots \\
\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(g(z)(z-z_0)^n) &= \underbrace{0 - \dots -}_{\text{alle }=0} \underbrace{a_{-1}(n-1)!}_{\text{endlich}} + \underbrace{a_0(z-z_0)^n(n-1)!}_{=0 \text{ falls } z=z_0} + \dots \\
\to a_{-1} &= \frac{1}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}((z-z_0)^n g(z))\big|_{z=z_0} \\
\text{anstatt } a_{-1} &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \mathrm{d}\xi g(\xi)
\end{aligned}$$

Berechnung von Residuen: $g(z) = 1/z$ (Klassiker) an der Stelle 0:

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathrm{d}\xi g(\xi) &= \oint_C \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = i\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\lambda \frac{\exp(i\lambda)}{\exp(i\lambda)} = 2\pi i \quad \text{(oder kartesisch)} \\
a_{-1} &= \frac{1}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}((z-z_0)^n g(z))\big|_{z=z_0}
\end{aligned}$$

Potenzen von z zum „Killen“ der Singularität

$$\begin{aligned}
n = 1 :& \frac{1}{0!}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0}\left(z\frac{1}{z}\right)\big|_{z=0} = 1 \\
n = 2 :& \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}^1}{\mathrm{d}z^1}\underbrace{\left(z^2\frac{1}{z}\right)}_{=z}\big|_{z=0} = 1 \\
n = 3 :& \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\underbrace{\left(z^3\frac{1}{z}\right)}_{=z^2}\big|_{z=0} = 1 \checkmark
\end{aligned}$$

Y.6. Laplace-Gleichungin 2D

Komplexe Funktion $g(z) = u(x+iy) + iv(x+iy)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \underset{\downarrow}{=} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} \overset{\uparrow}{=} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \underset{\downarrow}{=} -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \to \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}_{=\triangle \text{ in 2D}} u = 0$$

$\partial_x\partial_y = \partial_y\partial_x$

Cauchy Riemann 1 Cauchy Riemann 2

$$\frac{\partial^2 1}{\partial x^2} \underset{\downarrow}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \overset{\uparrow}{=} -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} \underset{\downarrow}{=} -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \to \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}_{=\triangle \text{ in 2D}} v = 0$$

$\partial_x\partial_y = \partial_y\partial_x$

Cauchy Riemann 2 Cauchy Riemann 2

Anwendung in Potezialproblemen mit Dirilecht-Randbedingungen: $u = \text{const.} = \phi$. Abbildungen für „komplexe“ Geometrie.

$\triangle\phi = 0$ ist in 2D invariant unter Abbildungen

$$\begin{matrix} z = x + iy \xrightarrow{g} W = u + iv \\ z = G(w) \to [G]W = g(z) \end{matrix} : g(x,y) = G(u(x,y), v(x,y))$$

g ist analytisch (Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen gelten) und umkehrbar

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial v} \\
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial v}\right) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial G}{\partial u} \\
&\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial G}{\partial v} \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial v} \\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial v}\right) \\
&= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial G}{\partial u} \\
&\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial G}{\partial v}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{\partial^2 G}{\partial v^2}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right) \\
&\quad + 2\frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\overbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}^{=-\partial u/\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\overbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}^{=\partial u/\partial x}\right)}_{\to 0} \\
&\quad + \frac{\partial G}{\partial u}\underbrace{\left(\overbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{=-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}} + \overbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}^{=-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}}\right)}_{\to 0} + \frac{\partial G}{\partial v}\underbrace{\left(\overbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}^{=-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}} + \overbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}^{=-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}\right)}_{\to 0} \\
&= \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\left(\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial v^2}\right)
\end{aligned}$$

$\triangle g = 0 \to \triangle G = 0$, Laplace-Gleichung wird in dem Koordinaten z und ω gelöst.

Teil C.
Fortsetzung elektromagnetische Wellen

C.8. Dispersion von Wellen

Dispersionsrelation von Wellen in einem Medium:

$$\omega(k) = \frac{ck}{u(k)}, k(\omega) = \frac{\omega}{n(\omega)c}$$

$\to$ Phasengeschwindigkeit: $v_{ph} = \dfrac{\omega(k)}{k} = \dfrac{c}{u(k)}$

$$\to \text{ Gruppengeschwindigkeit: } v_{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \left(\frac{\partial k}{\partial\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{n(\omega)\omega}{c}\right)\right)^{-1}$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial\omega}\frac{\omega}{c} + \frac{n(\omega)}{c}\right)^{-1}$$
$$v_{gr} = \frac{c}{n(\omega) + \omega\frac{\partial u}{\partial\omega}}$$

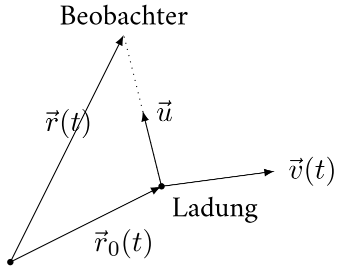
Normale Dispersion:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\omega} > 0 \to \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} < \frac{\omega}{k}$$

alles in Ordnung, Energiefluss ist langsamer als c.

C.9. Liénard-Wiechert-Potential

retardierte Potenziale von Punktladungen



$$\rho(\vec{r},t) = q\delta_D(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$$
$$\vec{j}(\vec{r},t) = q\,\vec{v}(t)\delta_D(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$$

$$\phi(\vec{r},t) = q\int \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\delta_D\big(\vec{r}\,' - \vec{r}_0\big)\delta_D\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}\right)$$
$$\text{aus } \psi(\vec{r},t) = \int \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3r' \frac{Q(\vec{r}\,',t')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\delta_D\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}\right)$$
$$\phi(\vec{r},t) = q\int \mathrm{d}t \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}\delta_D\underbrace{\left(t - t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}\right)}_{\equiv u}$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t'} = 1 - \frac{\vec{u}(t')\,\vec{v}(t')}{c} \text{ mit } \vec{u}\big(t'\big) = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}$$

fixiert $u = 0$ oder $t = t' + |r - r_0|/c$

$$\mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}u}{1 - \frac{\vec{u}(u)\cdot\vec{v}(u)}{c}}$$
$$\phi(\vec{r},t) = q\int \mathrm{d}u \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0(u)|}\frac{1}{1 - \frac{\vec{u}(u)\cdot\vec{v}(u)}{c}}\delta(u) \text{ Feld einer bewegten Punktladung}$$

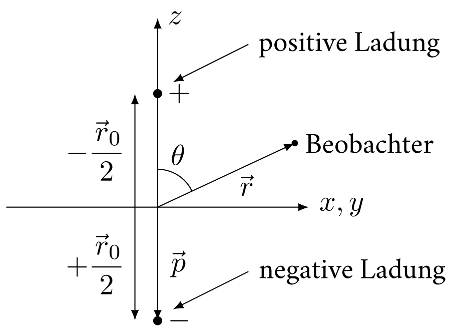
Ausdurck für die retardierten Potenziale

$$\phi(\vec r,t) = q\frac{1}{|\vec r - \vec r_0(t')|}\frac{1}{1-\frac{\vec u(t')\cdot\vec v(t')}{c}}\Big|_{t'=t-\frac{|\vec r-\vec r_0(t')|}{c}}$$
$$\vec A(\vec r,t) = q\frac{\vec v(t)}{c}\frac{1}{|\vec r - \vec r_0(t')|}\frac{1}{1-\frac{\vec u(t')\cdot\vec v(t')}{c}}\Big|_{t'=t-\frac{|\vec r-\vec r_0(t')|}{c}}$$

C.10. Hertz-Dipol → Feld eines zeitabhängigen Dipols

kleine Umformung der Liénard-Wiechert-Potentiale

$$\phi(\vec r,t) = \frac{q}{|\vec r - \vec r_0(t')| - \frac{\vec r-\vec r_0(t')}{|\vec r-\vec r_0(t')|}\frac{\vec v(t')}{c}}\Big|_{t'=t-\frac{|\vec r-\vec r_0(t')|}{c}}$$
$$A(\vec r,t) = \frac{q\frac{\vec v(t')}{c}}{|\vec r - \vec r_0(t')| - \frac{\vec r-\vec r_0(t')}{|\vec r-\vec r_0(t')|}\frac{\vec v(t')}{c}}\Big|\underbrace{t'=t-\frac{|\vec r-\vec r_0(t')|}{c}}_{\text{Bedingung für die retardierte Zeit implizit gegeben}}$$

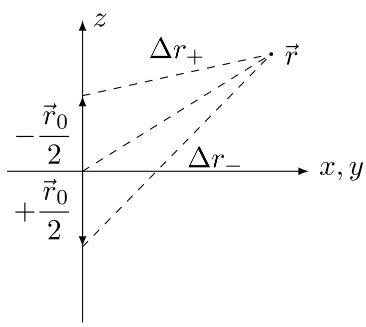


$$q\vec v(t) = -\frac{q}{2}\dot{\vec r}_0 + \frac{q}{2}\left(-\dot{\vec r}_0\right) = -q\dot{\vec r}_0 = \dot{\vec p}$$

mit Dipolmoment $\vec p = -q\dot{\vec r}_0$. Kanonische Schwingung mit der Frequenz:

$$\frac{v}{c} = \frac{2r_{0,\max}}{\Delta tc} = \frac{r_{0,\max}\omega}{\pi c} \to \frac{v}{c} = \frac{2}{\lambda}r_{0,\max}$$

$$\begin{cases}\Delta\vec r_-(t') = \vec r - \frac{1}{2}\vec r_0(t') \\ \Delta\vec r_+(t') = \vec r + \frac{1}{2}\vec r_0(t')\end{cases}$$
$$\begin{cases}\Delta\vec r_-(t') + \vec r_+(t') = 2\vec r \\ \Delta\vec r_-(t') - \vec r_+(t') = -\vec r_0\end{cases}$$



Substitution in die Ausdrücke für die Liénard-Wiechert-Potentiale

$$\phi(\vec r,t) = \frac{-q}{\Delta\vec r_-(t') - \frac{\Delta\vec r_-(t')}{|\Delta\vec r_-(t')|}\frac{\dot{\vec r}_0(t')}{2c}}\Big|_{t'=t-\frac{|\Delta\vec r_-(t')|}{c}} + \frac{-q}{\Delta\vec r_+(t') - \frac{\Delta\vec r_+(t')}{|\Delta\vec r_+(t')|}\frac{\dot{\vec r}_0(t')}{2c}}\Big|_{t'=t-\frac{|\Delta\vec r_+(t')|}{c}}$$

$$\vec A(\vec r,t) = \text{ analoger Ausdruck mit Strom } \pm q\frac{\dot{\vec r}_0}{2c} = \vec j$$

- falls der Beobachter **weit** von der Quelle entfernt ist, gilt

$$\Delta\vec{r}_{\pm} = \vec{r} \pm \frac{1}{2}\vec{r}_0 \approx \vec{r}$$

überall, wo $\Delta r_{\pm}$ vorkommt. → Skala: Dipol $\vec{r}_0$; Abstand $\gg$ Länge des Dipols.

- langsame Bewegung des Dipols $\frac{v}{c} \ll 1$ (wegen der $\dot{\vec{r}}_0$ im Zähler) → Skala

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega}c \ll r_0$$

Wellenlänge $\ll$ Länge des Dipols

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{-q\frac{\dot{\vec{r}}_0(t')}{c}}{|r|} = \frac{\dot{\vec{p}}(t')}{cr}\bigg|_{t'=t-\frac{|\vec{r}|}{c}}$$

weil:

1. $|\Delta\vec{r}_-| = |\Delta\vec{r}_+| \approx r$ und
2. $\dot{\vec{r}}_0$ im Zähler Terme der Ordnung $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ erzeugt.

Lorenz-Eichbedingung: div $\vec{A} + \partial_{ct}\phi = 0$ →

$$\begin{aligned}
\partial_{ct}\phi &= -\operatorname{div}\left(\frac{\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr}\right)\\
\phi &= -\int \mathrm{d}t \operatorname{div}\left(\frac{\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right) = -\operatorname{div}\left(\frac{1}{r}\int \mathrm{d}t\,\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) = -\operatorname{div}\left(\frac{\vec{p}}{r}\right)\\
&= \overbrace{\frac{\dot{\vec{p}}\vec{r}}{cr^2}}^{\propto\frac{1}{r}} + \underbrace{\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}}_{\propto\frac{1}{r^2}}\\
\vec{p}(t(\vec{r})), t(r) &= t - \frac{|\vec{r}|}{c}\\
\nabla\vec{p} &= \frac{\partial t}{\partial r}\frac{\partial\vec{p}}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\vec{r}}{r}\dot{\vec{p}}
\end{aligned}$$

Nahbereich um den Dipol
$r \ll \lambda$

$$\phi = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}, \quad \frac{\dot{\vec{p}}\vec{r}}{cr^2} \text{ vernachlässigt}$$

Dipolpotenzial mit $\phi \sim 1/r^2$ proportional zu $\vec{p}$

Fernbereich um den Dipol
$r \gg \lambda$

$$\phi = \frac{\dot{\vec{p}}\vec{r}}{cr^2}, \quad \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} \text{ vernachlässigt}$$

zeitabhängiger Dipol mit $\phi \sim 1/r$ proportional zu $\dot{\vec{p}}$

Felder:

$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ und $\vec{E} = -\partial_{ct}\vec{A} - \phi$. Nach längerer Rechnung erhält man

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\frac{\ddot{\vec{p}}}{c^2r} - \frac{\dot{\vec{p}}}{cr} + \frac{3\left(\dot{\vec{p}}\cdot\vec{r}\right)\vec{r}}{cr^4} + \frac{\left(\ddot{\vec{p}}\right)\vec{r}}{c^2r^3} + \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\\
\vec{B} &= \frac{\ddot{\vec{p}}\times\vec{r}}{c^2r^2} + \frac{\dot{\vec{p}}\times\vec{r}}{cr^3}
\end{aligned}$$

Es existiert kein statischer Anteil in B!
Nahbereich (keine Retardierung → Feld folgt instantan)

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p}\,\vec{r})\,\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}$$
$$\vec{B} = \frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{r}}{cr^3}$$

Fernbereich (führende Terme in $1/r$):

$$\vec{E} = -\frac{\ddot{\vec{p}}}{cr} + \frac{\left(\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{r}\right)\vec{r}}{c^2 r^3} = \frac{1}{c^2 r^3}\left(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}\right) \times \vec{r} \quad \text{wegen Grassman-Identität}$$
$$\vec{B} = \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{c^2 r^2}$$
$$\rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{B} \times \vec{r}}{r}$$

wechselseitig orthogonal im Fernbereich. Felder $\sim 1/r$ → Energiedichte $\sim 1/r^2$
Poynting-Vektor des Hertz-Dipols → Energietransport.

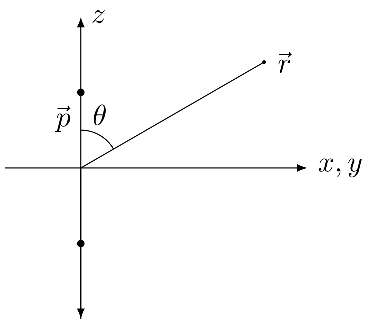
$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{B} \times \frac{\vec{r}}{r}\right) \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{B}^2\frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{B}\,\vec{r}}{r}\vec{B}\right)$$

Orthogonalität: $\vec{B}\,\vec{r} = 0$ im Fernbereich

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{B}^2\frac{\vec{r}}{r} = \frac{c}{4\pi}\frac{\left(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}\right)^2}{c^4 r^4}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\left|\ddot{\vec{p}}\right|^2}{4\pi c^3 r^2}\sin^2\theta$$

Nahbereich: Orthogonalität nicht gegeben:

$$\begin{aligned}
\vec{S} &= \frac{c}{4\pi}\left(\frac{3(\vec{p}\,\vec{r})\,\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right) \times \left(\frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{r}}{cr^3}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi r^8}\left(3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}\right) \times \left(\dot{\vec{p}} \times \vec{r}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi r^8}(3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}\left(r^2\dot{\vec{p}} - \left(\vec{r}\,\dot{\vec{p}}\right)\vec{r}\right) \\
&\quad -r^2\left((\vec{r} \cdot \vec{p})\dot{\vec{p}} - \left(\vec{p} \cdot \dot{\vec{p}}\right)\vec{r}\right)) \\
&= \frac{1}{4\pi r^8}\left(2(\vec{p} \cdot \vec{r})r^2\dot{\vec{p}} \mp p\dot{p}r^2(3\cos\theta + 1)\,\vec{r}\right)
\end{aligned}$$



keine Strahlung um die Dipolachse!

abgestrahlte Energie: Integration über eine Kugel mit Radius R

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}\Omega R^2 S = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \mathrm{d}t \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}\mu \underbrace{\int_0^{2t} \mathrm{d}\varphi}_{=2\pi} \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3 R^2} \underbrace{\left(1 - \mu^2\right)}_{\sin^2\theta} R^2 \\
&= \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} 2\pi \cdot \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3}\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}\mu\left(1 - \mu^2\right) \\
&= \frac{2}{3c^3}\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \mathrm{d}t\,\ddot{p}^2
\end{aligned}$$

falls $p = p_0\sin(\omega t) \implies \ddot{p} = -p_0\omega^2\sin(\omega t)$

$$E = \frac{2}{3c^3}p_0^2\omega^4\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \mathrm{d}t\sin(\omega t)^2 = \frac{p_0^2\omega^4}{3c^2} \quad \text{Rayleigh-Streuung + Himmelblau.}$$

Teil D.
Lorentz-Geometrie und spezielle Relativität

D.1. Lorentz- und Galilei Transformationen

Transformationen müssen lienar sei, falls sie die Homogenität des Raums (beziehungsweise der Raumzeit) erhalten sollen

$$\text{2 Bezugssysteme} \begin{cases} S : \left(t, x^i\right) = x^\mu \\ S' : \left(t', x'^i\right) = x'^\mu \end{cases}$$

$S \xleftrightarrow{lineareTransformationen} S'$

- eine Uhr bewegt sich frei durch S und S': Trajektorie $x^i(\tau)$, Geschwindigkeit $\partial_\tau x^i = \text{const.}$, „Inertialsystem"
- τ ist die von der Uhr angezeigte Zeit $\sim$ Eigenzeit
- Homogenität: gleiche Zeitintervalle $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$ überall

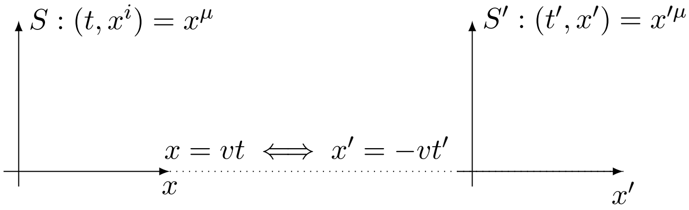
$$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \text{const.} \to \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = 0 \quad \text{,genauso in } S'\text{:} \quad \frac{\mathrm{d}^2 x'^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}x'^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}x'^\mu}{\mathrm{d}x^\nu}}_{\text{Jacobi-Matrix}} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\mathrm{d}\tau} \to \frac{\mathrm{d}^2 x'^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = \underbrace{\frac{\partial x'^\mu}{\partial \mathrm{d}x^\nu}}_{\text{Jacobi-Matrix}} \frac{\mathrm{d}^2 x^\nu}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\tau}$$

Falls die Terme mit zwei Ableitungen nach verschiedene Richtungen $= 0$ sind, ist die Transformation linear. Nur lineare Transformationen können die Homogenität erhalten:

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} = 0 \to \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = a^\mu \nu \to x'^\mu = a^\mu \nu x^\nu + b^\mu$$

D.2. allgemeinste lineare Transformationen zwischen 2 Bezugssystemen



S und S' bewegen sich mit der Relativgeschwindigkeit v. Allgemeiner Ansatz für eine lineare Transformation

1. $x' = ax + bt$, aber $x = vt$ bedeutet $x' = 0$:

$$x' = 0 = avt + bt = (av + b)t$$

$\to b = -av$, also $x' = a(x - vt)$

2. $x = ax' + bt'$, aber $x' = -vt$ bedeutet $x = 0$:

$$x = 0 = -avx' + bt' = (-av + b)t'$$

$\to b = +av$, also $x = a(x' + vt')$

2 Möglichkeiten:
Galilei universelle Zeit $t = t'$

$$\begin{cases} x' = a(x - vt) \\ x = a(x' + vt) \quad \text{falls } t = t' \end{cases}$$

nur konsistent falls $a = 1$:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ x = x' + vt \end{cases}$$

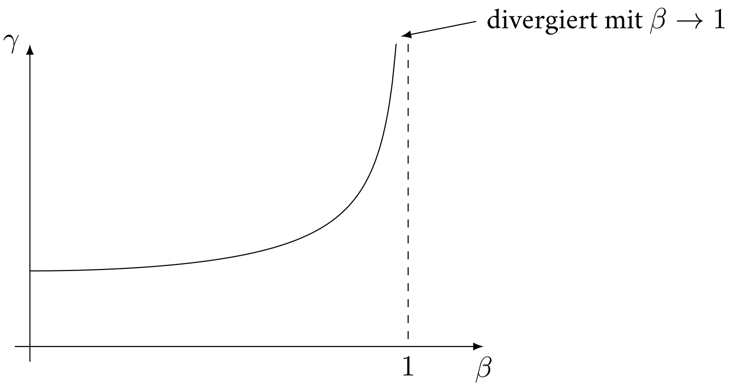
Lorentz: universelle Lichtgeschwindigkeit
$x = ct$ und $x' = ct'$

$$\begin{cases} ct = a(ct' + vt') \\ ct' = a(ct - vt) \end{cases} \qquad (*)$$

Multiplikation beider Gleichungen in $(*)$

$$c^2tt' = a^2\big(ct' + vt'\big)(ct - vt) = a^2tt'(c+v)(c-v) = a^2tt'\big(c^2 - v^2\big)$$

$$a \equiv \gamma = \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ ,mit } \beta = \frac{v}{c}$$



$$\beta \ll 1 : \qquad \gamma \simeq 1 + \underbrace{\frac{\partial\gamma}{\partial\beta}\Big|_{\beta=0}}_{=0}\beta + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial^2\gamma}{\partial\beta^2}\Big|_{\beta=0}}_{=1}\beta^2 + \dots = 1 + \frac{\beta^2}{2}$$

Standardform der Lorentz-Transformation

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) = \gamma(x - \beta ct) \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \end{aligned}$$

(aus $x' = \gamma(x - vt)$ und $x = \gamma(x' + vt')$ durch Eliminieren von x', mit $\dfrac{1-\gamma^2}{\gamma} = -\beta^2$) Matrix-Schreibweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}_{x'^\mu}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & y \end{pmatrix}}_{\Lambda^\mu_\nu} \underbrace{\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}}_{x^\nu}$$

$\sim$ gemeinsame Transformation von x und t
$c \simeq 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, „Lichtgeschwindikgeit" $\sim$ naja, können wir jetzt noch nicht wissen!

D.3. Lorentz-Invarianten

Idee: Rotation lassen $x_i x^i = x^2$ invariant

$$\begin{aligned}(ct')^2 - x'^2 &= \gamma^2\Big((ct)^2 - 2ct\beta x + \beta^2 x^2 - x^2 + 2x\beta ct - \beta^2 c^2 t^2\Big)\\ &= \gamma^2\Big((ct)^2\big(1-\beta^2\big) - x^2\big(1-\beta^2\big)\Big)\\ &= \gamma^2\big(1-\beta^2\big)\Big((ct)^2 - x^2\Big) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}^2}\big(1-\beta^2\big)\Big((ct)^2 - x^2\Big) = \Big((ct)^2 - x^2\Big)\end{aligned}$$

$s^2 = (ct)^2 - x^2$ ist invariant unter Lorentz-Transformationen. Minkowski-Metrik

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} s^2 &= \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_\mu x^\mu \quad \text{mit} \quad x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \\ s^2 &= \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = c^2 t^2 - \underbrace{x_i x^i}_{\text{invariant unter Rotation}} \sim \text{identisch in allen Systemen}\end{aligned}$$

D.4. Rapidität und hyperbolische Rotation

D.5. Vergleicht zwischen Lorentz-Transformationen und Drehungen

D.6. Symmetrie der Raumzeit

D.7. Additionstheorem für Geschwindigkeiten

D.8. relativisitsche Effekte

D.9. Eigenzeitintegral

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$$

mit $x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x^i \end{pmatrix}$

$$= c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x^i = c^2 \mathrm{d}t^2 \qquad \text{(Eigenzeit)}$$

4-Geschwindigkeit: Tangente an der Weltlinie $x^\mu(\tau)$

$$\begin{aligned} u^\mu(\tau) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}x^\mu = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x^\mu = \gamma\begin{pmatrix} c \\ v^i\end{pmatrix} \\ \eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu &= \gamma^2\big(c^2 - v_i v_i\big) = c^2\gamma^2\big(1-\beta^2\big) = c^2 \qquad \text{(Normierung)} \\ \to c^2\mathrm{d}\tau^2 &= c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x_i\mathrm{d}x^i \\ \mathrm{d}\tau &= \sqrt{\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x^i}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\frac{x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{1-\beta^2}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma}\end{aligned}$$

Zeitintervall, das von der Uhr angezeigt wird:

$$\Delta\tau = \int_A^B \mathrm{d}\tau = \int_A^B \frac{\mathrm{d}t}{\gamma}$$

$$\begin{aligned} S &= -mc \int \mathrm{d}s = -mc \int \mathrm{d}t \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}} = -mc \int \mathrm{d}t \sqrt{c^2 - v_i v^i} \\ &= -mc^2 \int \mathrm{d}t \sqrt{1 - \frac{v_i v^i}{c^2}} \approx \int \mathrm{d}t \underbrace{\frac{m}{2} v_i v^i}_{T\sim \text{ kinetische Energie}} + \text{const.} \end{aligned}$$

relativistische Bewegung
klassische Mechanik $\mathcal{L}(x_i \dot{x}_i) = \frac{1}{2} \dot{x}_i \dot{x}^i - \phi(x_i)$
invariante Langrange-Funktion $\xrightarrow{\text{Variation}}$ kovariante Bewegungsgleichung Variation $\delta S = 0 \to \ddot{x}^i = -\partial^i \phi$

- keine offensichtliche Interpretation von $\mathcal{L}$ oder S
- $\mathcal{L}$ oder S nicht messbar
- Invarianz $\to$ Kovariant-Argument funktioniert nicht:

$$\dot{x}_i \to \dot{x}_i + v_i, \mathcal{L} \to \frac{1}{2}(\dot{x}_i + v_i)(\dot{x}^i + v^i) = \overbrace{\frac{1}{2}\dot{x}_i \dot{x}^i}^{=\mathcal{L}} + \underbrace{\dot{x}_i v^i + \frac{1}{2} v_i v^i}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_i v^i + \frac{1}{2} v_i v^i t\right)}$$

$\to$ wir brauchen eine Lorentz-invariantet relativisitsche Lorentz-Funktion

- $\mathcal{L}$ soll konvex sein
- Legendre-Transformation $\mathcal{H} = \dot{x}^i \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} - \mathcal{L}$
- $\mathcal{H}$ ist dann nach unten beschränkt
- am besten aus maximal ersten Ableitungen

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_i \dot{x}_i, \ddot{x}_i, \ldots)$$

$$\delta S = 0 = \int \mathrm{d}t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \delta x^i + \ldots \right.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{L} - \dot{x}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \dot{x}^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \ddot{x}^i + \cdots - \ddot{x}^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \dot{x}^i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = 0 \text{ für } \mathcal{L} = \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^i)$$

Idee: klasische Lagrange Funktion $\to$ relativistische Eigenzeit?

- intuitiv (kein Unterschie von Fermat und Hamilton)
- messbar
- Lorentz-invariant
- konvex
- Möglichkeit zur Einbeziehung der Gravitation

$$S = -mc \int \mathrm{d}s = -mc^2 \int \mathrm{d}\tau = -mc^2 \int \frac{\mathrm{d}t}{\gamma}$$

vergleiche mit mit

$$\begin{aligned} S &= \int \mathrm{d}t \mathcal{L} \\ \to \mathcal{L}(\dot{x}) &= -\frac{mc^2}{\gamma} \end{aligned}$$

D.10. relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{\gamma} = \sqrt{c^2 - v^2} \\ \to p &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} \end{aligned}$$

$$p^2\left(c^2 - v^2\right) = v^2, p^2 c^2 = v^2\left(1 + p^2\right), v = c\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= v\frac{\partial L}{\partial v} - \mathcal{L} = v\frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \sqrt{c^2 - v^2} = vp + \frac{v}{p} = v\left(p + \frac{1}{p}\right) \\ \to \mathcal{H} &= c\frac{p}{\sqrt{1 + p}}\frac{p^2 + 1}{p} = c\sqrt{1 + p^2} \end{aligned}$$

mit mc^2:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sqrt{(mc)^2 + c^2 p^2} \\ \mathrm{d}S^2 &= \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)c^2 \mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)\mathrm{d}x_i \mathrm{d}x^i, |\phi| < c^2, \text{ größer in der S} \\ S &= -mc \int \mathrm{d}s = -mc^2 \int \mathrm{d}t \sqrt{\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)c^2\left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)v^2} \\ \mathrm{d}S^2 &\to g_{\mu\nu} \underbrace{\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}}_{=\begin{pmatrix} c \\ v_i \end{pmatrix}} \underbrace{\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}}_{\begin{pmatrix} c \\ v_i \end{pmatrix}} \mathrm{d}t^2 \\ S &= -mc^2 \int \mathrm{d}t \sqrt{c^2\left(1 + \frac{2\phi}{c} - \beta^2\right)} \simeq mc^2 \int \mathrm{d}t \left(1 + \frac{\phi}{c^2} - \frac{\beta}{c^2}\right) \\ \to S &= \int \mathrm{d}t \left(\underbrace{\frac{m}{2}v^2}_{T} - \underbrace{m\phi}_{V}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E^2 &= p^2 + m^2, c = 1, E = \sqrt{p^2 + m^2} \\
v_{ph} &= \frac{E}{p} = \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{p} \\
v_{gr} &= \frac{\partial E}{\partial p} && = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} \\
v_{ph} v_{gr} &= \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{p} \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} = 1 \\
c &= \sqrt{v_{ph} v_{gr}}
\end{aligned}
$$

D.11. geometrische Sicht auf Bewegung

$$
\begin{aligned}
\delta S &= -mc^2 \delta \int_A^B \mathrm{d}\tau = -mc^2 \int_A^B \frac{\eta_{\mu\nu}}{2\mathrm{d}t} (\mathrm{d}x^\mu \delta \mathrm{d}x^\nu + \delta \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu) \\
&\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Symmetrie } \mu \leftrightarrow \nu}}{=} -mc^2 \int \eta_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\mathrm{d}\tau} \delta\delta x^\nu \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Partielle Integration}}}{=} mc^2 \int \eta_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} \mathrm{d}\tau \delta x^\nu \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}
$$

$$
\rightarrow \text{Lösung:} x^\mu(\tau) = a^\mu \tau + b^\mu, \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = a^\mu, \text{const.}
$$

Prinzip der extremen Eigenzeit $\rightarrow$ Graden im kräftefreien Fall.
mechanische Ähnlichkeit:

$$
\begin{aligned}
x &\rightarrow \alpha x \\
t &\rightarrow \beta t
\end{aligned}
$$

für viele Fälle sieht die Larange Funktion so aus:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{x^2}{2} - x^q \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} &= \text{const.}, \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \text{const.}
\end{aligned}
$$

D.12. Loretz-Kräfte und Feldstärketensor

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} &= q\left(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}\right), \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}, \vec{p} = \gamma m \vec{v} \\
\vec{\beta}\gamma \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} &= c\vec{\beta}\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\gamma\vec{\beta}\right) = \cdots = m\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma c) = q\vec{\beta}\gamma\vec{E} \\
\gamma \frac{\mathrm{d}\vec{\beta}}{\mathrm{d}t} &= cm\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma\vec{\beta}\right) = q\gamma\left(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}\right) \\
m \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_x & B_y \\ E_y & B_x & 0 & B_z \\ E_z & -B_y & B_z & 0 \end{pmatrix}}_{F^{\mu\nu} \sim \text{Feldstärketensor}} u_\nu
\end{aligned}
$$

Erhaltung der Normierung von $u_\mu u^\mu = c^2$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(u_\mu u^\mu) = u_\mu \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{q}{m} u_\mu F^{\mu\nu} u_\nu = \frac{q}{m} \underbrace{u_\mu u_\nu}_{\text{symmetrisch}} \overbrace{F^{\mu\nu}}^{\text{antisymmetrisch}}$$

$F^{\mu\nu} \to \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}$ Lorentztransformation

Teil E.
kovariante Elektrodynamik

E.1. homogene Maxwell-Gleichungen

$$
\begin{aligned}
x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x^i \end{pmatrix} \to \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} &= (\partial_{ct}, \partial_i) \to \partial_\mu x^\mu = 4 \\
x_\nu &= \eta_{\mu\nu} x^\mu = (ct, -x_i) \\
\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} &= 0 \quad \text{Bianchi-Identität} \\
\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} &= 0 \\
\partial^\nu (\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}) &= 0 \\
\partial^\nu \tilde{F}_{\mu\nu} &= 0 \qquad \tilde{F} \text{ dualer Feldtensor} \\
\mu = 0 (\text{nur } B\text{-Komponenten}) : \partial^\nu \tilde{F}_{0\nu} &= \partial^i B_i = \operatorname{div} \vec{B} = 0 \checkmark \\
\mu = 1 (E\text{- und } B\text{-Komponenten}) : \partial^\nu \tilde{F}_{1\nu} &= -\partial_0 B_x - \partial_y E_z + \partial_z E_y \to \operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_{ct} \vec{B}
\end{aligned}
$$

E.2. Kontinuität der Ladungsdichte

$$
j^\mu = \begin{pmatrix} \rho c \\ j^i \end{pmatrix} = \rho_0 \gamma \begin{pmatrix} c \\ v^i \end{pmatrix} \to \partial_\mu j^\mu = \partial_t(\rho c) + \partial_i j^i = \partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0
$$

$\partial_\mu j^\mu \sim$ Lorentz-Invariante, in allen Systemen gleich!

$$
\left(\partial t \int_V \mathrm{d}^3 r \rho = - \int_{\partial V} \mathrm{d} \vec{S} \vec{j} \right)
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c} j^\nu \\
\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c} \partial_\nu j^\nu
\end{aligned}
$$