Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg
Sommersemester 2017

4. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien am 15.05.2017
Besprechung in den Tutorien am 22.05.2017

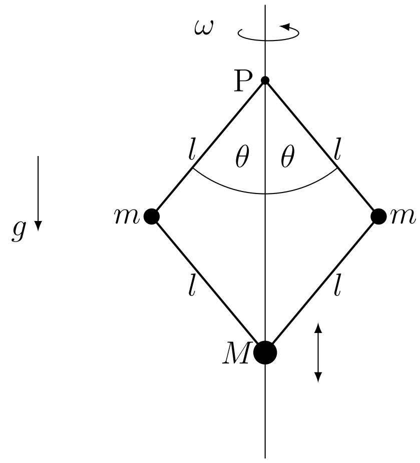
Aufgabe 4.1 (6 Punkte)**:**
Betrachten Sie zwei Massenpunkte mit Massen m und M, die sich jeweils auf einer Geraden bewegen können. Diese Geraden sind parallel zueinander und haben einen Abstand b. Wählen Sie zur Beschreibung der Position der beiden Massenpunkte eine Koordinatenachse parallel zu den Geraden. Die Position von M bezüglich dieser Koordinaten sei gegeben durch $y(t) = vt$, wobei v eine konstante Geschwindigkeit bezeichnet. Zwischen den beiden Massen wirke eine Kraft mit Potenzial $V = (1/2)kd^2$, mit dem Abstand d zwischen den Massenpunkten.

a) Fertigen Sie eine Skizze des beschriebenen Systems an, in der Sie die beiden Massen m und M sowie die Größen b und d kenntlich machen. Bestimmen Sie die Lagrangefunktion und leiten Sie die Bewegungsgleichungen für die Position x der Masse m her.

b) Die Lagrangefunktion hängt in diesem Fall explizit von der Zeit ab und ist nicht invariant unter Zeittranslationen. Wir können trotzdem eine Symmetrietrietransformation für diese Lagrangefunktion finden, indem wir die aus der Vorlesung bekannte Zeittranslation mit einer zusätzlichen Transformation von x kombinieren. Finden Sie diese und zeigen Sie explizit, dass es sich um eine Symmetrietransformation handelt.

c) Bestimmen Sie die zugehörige Erhaltungsgröße.

Aufgabe 4.2:
Betrachten Sie eine Anordmumg bestehend aus zwei beweglich angebrachten Massestücken der Masse m, die aus der Vertikalen um einen Winkel θ ausgelenkt werden können, und einem Gegengewicht der Masse M, das sich nur vertikal bewegen kann. Die masselosen starren Verbindungsstangen habe jeweils die Länge l. Die ganze Anordnung dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale Achse und der Aufhängepunkt P ist fixiert. Betrachten Sie alle Massestücke als punktförming.



bitte wenden

a) Wählen Sie θ als generalisierte Koordinate und bestimmen Sie die kinetische und potenzielle Energie des Systems.

b) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und leiten Sie die Bewegungsgleichungen für den Winkel θ ab.

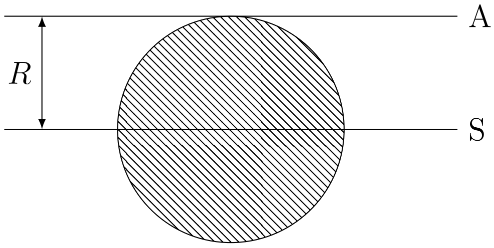
c) Bestimmen Sie den Gleichgewichtswinkel θ_0 als Funktion der Winkelgeschwindigkeit ω. (Im Gleichgewicht verschwinden die zeitlichen Ableitungen.) Bestimmen Sie daraus zusätzlich die minimale Winkelgeschwindigkeit ω_{min} bei der sich das Gegengewicht hebt.

Aufgabe 4.3 (6 Punkte)**:**
Betrachten Sie eine Münze mit Radius R und Masse M, die homogen verteilt ist. Im Folgenden können Sie die Ausdehnung der Münze in der Richtung senkrecht zur geprägten Grundfläche vernachlässigen.

a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Münze bezüglich der Achse, die senkrecht auf der Grundfläche steht und durch den Mittelpunkt geht.

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines homogenen Vollzylinders mit Radius R und Masse M bezüglich seiner Symmetrieachse.

c) Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_{A} der Münze um die Achse A, die tangential zur Münze verläuft. Berechnen Sie dazu zuerst das Trägheitsmoment I_{S} bezüglich der zu A parallelen Schwerpunktsachse S und benutzen Sie den Satz von Steiner.



Hinweis: Sie können benutzen, dass

$$\int \mathrm{d}\varphi \cos^4(\varphi) = \frac{3\varphi}{8} + \frac{1}{4}\sin(2\varphi) + \frac{1}{32}\sin(4\varphi).$$

Aufgabe 4.4 (8 Punkte)**:**

a) M sei eine Matrix, gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die auf 1 normierten Eigenvektoren von M. Diagonalisieren Sie M, indem Sie $M_{\text{D}} = SMS^{-1}$ berechnen. Dabei bezeichnet S die Tansformationsmatrix. Die Zeilen von S sind gerade die normierten Eigenvektoren (zur Erinnerung: somit ist S insbesondere orthogonal).

bitte wenden

Hinweis: Gehen Sie für die Lösung der Aufgabe wie folgt vor: Bestimmmen Sie zunächst das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \det(M - \lambda I)$, wobei λ eine reelle Variable und I die Einheitsmatrix ist. Die Eigenwerte von M sind durch die beiden Nullstellen λ_1 und λ_2 von $\chi(\lambda)$ gegeben. Die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ werden durch Lösen des Gleichungssystems $(M - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = 0$ und $(M - \lambda_2 I)\mathbf{v}_2 = 0$ bestimmt. Beachten Sie, dass hierdurch die Eigenvektoren nur bis auf einen skalaren Faktor bestimmt sind. Dieser wird durch die geforderte Normierung fixiert.

Gegeben seien nun drei Massenpunkte: $m_1 = 4m$ bei $\mathbf{r}_1 = (a, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $m_2 = m$ bei $\mathbf{r}_2 = (0, 2a, 4a)^{\mathrm{T}}$ und $m_3 = m$ bei $\mathbf{r}_3 = (0, 4a, 2a)^{\mathrm{T}}$, welche durch masselose Stangen starr miteinander verbunden sind.

b) Erstellen Sie eine Skizze und berechnen Sie den zugehörigen Trägheitstensor bezüglich des Ursprungs.

c) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente und die Hauptachsen $\mathbf{e}_i$.

Hinweis: Die hierzu notwendige Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren funktioniert wie in Teilaufgabe a) beschrieben, nun allerdings mit einer zusätzlichen Dimension und entsprechend drei Eigenwerten und Eigenvektoren.