Theoretische Physik II:
Analytische Mechanik und Thermodynamik
Prof. Dr. A. Hebecker
P. Henkenjohann

Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg
Sommersemester 2017

3. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien am 08.05.2017
Besprechung in den Tutorien am 15.05.2017

Aufgabe 3.1 (8 Punkte)**:**
In dieser Aufgabe sollen Sie die Formel für die Taylor-Entwicklung einer Funktion mehrerer Variablen herleiten, indem Sie die bekannte Taylor-Entwicklung einer Funktion einer Variablen anwenden. Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x)$ lautet die Taylor-Entwicklung um den Punkt x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

$f^{(n)}$ bezeichnet die n-te Ableitung von f bzw. $f^{(0)} = f$. Beachten Sie, dass diese Reihe nicht unbedingt überall bzw. überhaupt konvergiert.

a) Sei nun $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ \mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x})$ eine reelle Funktion von n Variablen ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$). Wir wollen f um den Punkt $\mathbf{a}$ entwickeln, wobei nun natürlich $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Definieren Sie dazu eine neue Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t) = f(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}))$ und entwickeln Sie diese um den Punkt $t = 0$ mit Hilfe der oben angegebenen eindimensionalen Taylor-Entwicklung bis einschließlich zur 1. Ordnung in t. Setzen Sie am Ende $t = 1$ um die multivariable Taylor-Entwicklung von f um den Punkt $\mathbf{a}$ bis zur ersten Ordnung zu erhalten.

b) Wiederholen Sie die Rechnung aus a) für den expliziten Fall $n = 2$, aber berechnen Sie nun alle Terme bis einschließlich zur 2. Ordnung in t. Setzen Sie am Ende wieder $t = 1$.

c) Der vollständige Ausdruck für die multivariable Taylor-Entwicklung um den Punkt $\mathbf{a}$ kann formal als

$$f(\mathbf{x}) = [\exp((\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \nabla) f](\mathbf{a})$$

geschrieben werden. Die explizite Auswertung dieser Formel erfolgt über die Reihendarstellung der Exponentialfunktion. Dabei wirken die Ableitungen *nur* auf die Funktion f und nicht auf das $\mathbf{x}$. Am Ende werden die Ableitungen am Punkt $\mathbf{a}$ ausgewertet (analog zu der bekannten eindimensionalen Formel). Reproduzieren und überprüfen Sie mit dieser Formel Ihre Ergebnisse aus a) und b).

Hinweis: In c) sollte man zur Komponentenschreibweise übergehen.

---

bitte wenden

Aufgabe 3.2 (5 Punkte)**:**
In einer Raumdimension besagt der Virialsatz, dass für eine Punktmasse m unter dem Einfluss eines Potentials $V(x)$, das homogen vom Grad k ist, die Relation

$$2\langle T\rangle = k\langle V(x)\rangle$$

erfüllt ist, wobei T die kinetische Energie darstellt und der Erwartungswert einer Funktion $f(t)$ durch

$$\langle f\rangle \equiv \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(t')\mathrm{d}t'$$

definiert ist. Zeigen Sie, dass das Potential des freien, ungedämpften harmonischen Oszillators die Voraussetzungen für die Anwendung des Virialsatzes erfüllt und überprüfen Sie den Virialsatz durch explizites Nachrechnen mit Hilfe der allgemeinen Lösung für die Oszillatorgleichung.

Aufgabe 3.3 (7 Punkte)**:**
Betrachten Sie den harmonischen Oszillator mit Masse m und Potential $V(x) = (k/2)x^2$.

a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion des harmonischen Oszillators.

b) Zeigen Sie, dass die Transformation

$$x(t) \to x(t) + \epsilon\cos\omega t$$

mit Parameter ϵ und $\omega^2 = k/m$ eine Symmetrietransformation ist.

c) Bestimmen Sie die zu dieser Symmetrietransfromation gehörende Erhaltungsgröße. Berechnen Sie diese explizit für die allgemeine Lösung, die Sie durch eine Amplitude und eine Phase parametrisieren sollen. Argumentieren Sie, dass hier die Erhaltung der Phase der allgemeinen Lösung beschrieben wird.

---

bitte wenden

Aufgabe 3.4:
Ein Teilchen der Masse m bewege sich reibungsfrei auf der Oberfläche eines unendlich langen Zylinders. Dieser Zylindermantel sei beschrieben durch $x^2+y^2 = R^2$, wobei R den Zylinderradius bezeichnet; die z-Achse entspricht der Zylinderachse. Auf das Teilchen wirke eine Kraft, die zum Ursprung des Koordinatensystems zeigt und proportional zur Entfernung des Teilchens vom Ursprung ist, $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$.

a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion mit z und dem azimutalen Winkel θ als generalisierte Koordinaten ($\tan\theta = y/x$), und leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab.

b) Zeigen Sie, dass die Transformation $\theta \to \theta + \alpha$ mit beliebigem Winkel α eine Symmetrietransformation ist und bestimmen Sie die dazugehörige Erhaltungsgröße.

c) Zeigen Sie, dass in diesem System eine weitere erhaltene Größe existiert, die analog zu der in Aufgabe 3.3 c) gefundenen ist. Geben Sie diese explizit an.