Theoretische Physik II:
Analytische Mechanik und Thermodynamik
Prof. Dr. A. Hebecker
P. Henkenjohann

Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg
Sommersemester 2017

2. Übungsblatt

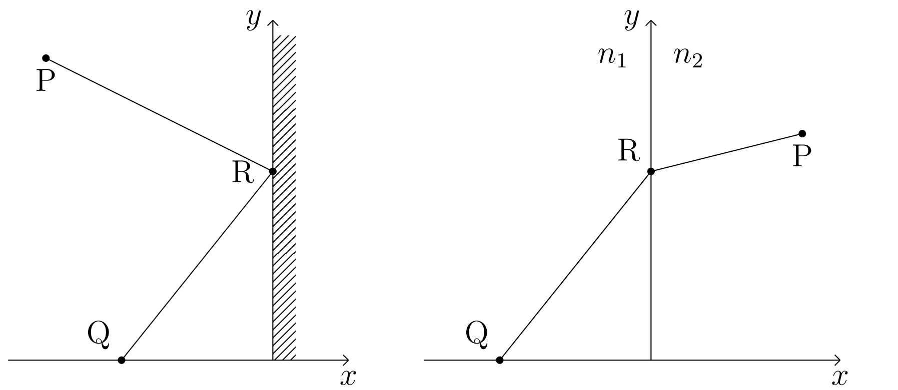
Abgabe in der Vorlesung am 02.05.2017
Besprechung in den Tutorien am 08.05.2017

Aufgabe 2.1 (7 Punkte)**:**

a) Setzen Sie im Ergebnis von Aufgabe 1.3 a) die Höhenfunktion identisch auf null, $z(\mathbf{x}) \equiv 0$, und zeigen Sie, dass die kürzeste Verbindung zweier Punkte $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ (in der Ebene) eine Gerade ist. Variieren Sie dazu das so erhaltene Funktional $F[\mathbf{x}]$ nach dem Weg $\mathbf{x}$ und fordern, dass es extremal wird, d.h. $\delta F[\mathbf{x}] = 0$. Lösen Sie das so erhaltene gekoppelte Differentialgleichungssystem.

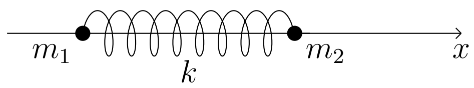
b) In dieser Teilaufgabe sollen Sie unter Ausnutzung des Fermat'schen Prinzips das Reflexions- und Brechungsgesetz der Optik herleiten. Betrachten Sie dazu einen Lichtstrahl, der zwei gegebene Punkte Q und P miteinander verbindet. Das Fermat'sche Prinzip fordert nun, dass der Lichtstrahl gerade denjenigen Weg zwischen den beiden Punkten wählt, der den sogenannten optischen Weg $\int n(\mathbf{x})|\mathrm{d}\mathbf{x}|$ minimiert. n bezeichnet den Brechungsindex, der vom jeweiligen Medium abhängt. Dies impliziert unter Ausnutzung von Teilaufgabe a), dass sich Lichtstrahlen in Gebieten mit konstantem n auf Geraden ausbreiten. Begründen Sie dies. Lösen Sie die Aufgabe in dem in der Abbildung definierten Koordinatensystem, wobei die Koordinaten der Punkte $\mathrm{Q} = (x_\mathrm{Q}, 0)$, $\mathrm{R} = (0, y_\mathrm{R})$ und $\mathrm{P} = (x_\mathrm{P}, y_\mathrm{P})$ sind.

Zusatzfrage (unbepunktet): Welcher wellenmechanischen Größe entspricht der optische Weg (bis auf Vorfaktoren)? Begründen Sie mit dieser Information das Fermat'sche Prinzip. Der Abschnitt im Skript ab Seite 11 zur Pfadintegralformulierung der Quantenmechanik kann hier hilfreich sein. Denken Sie daran, dass Licht klassisch gesehen eine Welle ist.

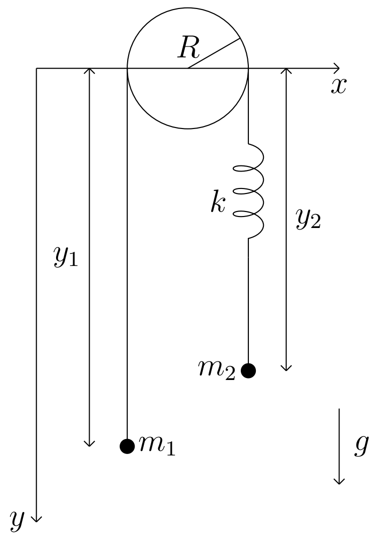


bitte wenden

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)**:**
Zwei Punktmassen mit Massen m_1 und m_2 seien durch eine ideale Feder mit einer Federkonstanten k verbunden. Im entspannten Zustand hat die Feder eine Länge L_0. Die Bewegung sei auf eine Dimension beschränkt. Führen Sie verallgemeinerte Koordinaten für die Massen ein und bestimmen Sie die Lagrange-Funktion. Berechnen Sie anschließend die Bewegungsgleichungen.



Aufgabe 2.3 (9 Punkte)**:**
Die Atwood'sche Fallmaschine besteht aus zwei Massen m_1 und m_2 im Schwerefeld der Erde, die über ein Seil verbunden sind, welches reibungsfrei über eine Rolle vom Radius R läuft. Seil und Rolle sind dabei als masselos anzunehmen. In das Seil sei zusätzlich eine ideale Feder mit der Federkonstanten k installiert. Die Länge des Seils inklusive entspannter Feder ist l_0.



a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion der Atwood'schen Fallmaschine mit zusätzlicher Feder in den Koordinaten y_1 und y_2.

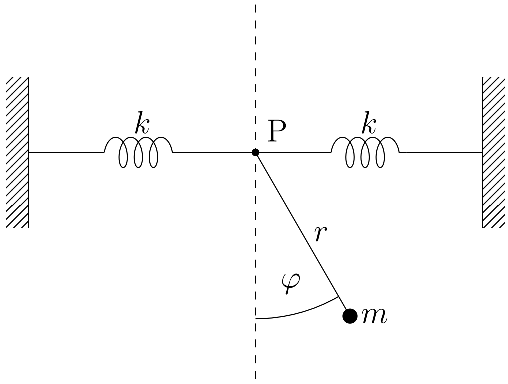
b) Überlegen Sie sich neue Koordinaten z_1 und z_2, in denen die Lagrange-Funktion in Summanden zerfällt, die nur von z_1 und z_2 abhängen. Diese Koordinaten sind Linearkombinationen von y_1 und y_2 mit bzw. ohne Koeffizienten m_1 und m_2.

c) Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen auf und interpretieren Sie diese physikalisch.

---

bitte wenden

Aufgabe 2.4:
Das in der Abbildung gezeigte Pendel mit Masse m hängt an einem masselosen Seil der konstanten Länge r, das im Punkt P gelagert ist. Dieser Punkt kann sich unter dem Einfluss zweier idealer Federn frei entlang der horizontalen Linie bewegen. Jede Feder hat die Federkonstante k.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

b) Nehmen Sie an, dass die Masse nur leicht aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt und losgelassen wird. Zeigen Sie, dass das Pendel dann mit der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mg + 2kr}{2kg}}$$

schwingt. Erkennen Sie den Satz von Pythagoras?

Hinweis: Für kleine Schwingungen kann man quadratische Terme, auch in den Geschwindigkeiten, vernachlässigen.