Theoretische Physik II:
Analytische Mechanik und Thermodynamik
Prof. Dr. A. Hebecker
P. Henkenjohann

Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg
Sommersemester 2017

1. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien am 24.04.2017

Aufgabe 1.1 (7 Punkte)**:**
Allgemein-relativistische Korrekturen zu den Planetenbewegungen können durch einen zusätzlichen Term im effektiven Gravitationspotential berücksichtigt werden:

$$V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\eta m}{r^2} - \frac{\alpha}{r} \quad ,$$

wobei η eine Konstante ist. Zeigen Sie, dass die Bewegung eines Planeten mit Masse m in diesem Potential durch

$$u'' = -Cu + \frac{m\alpha}{L^2}$$

beschrieben wird. Dabei ist $u = 1/r$, $r \equiv r(\varphi)$ und $u'' = \mathrm{d}^2u/\mathrm{d}\varphi^2$. (r, φ) sind Polarkoordinaten in der Bewegungsebene. C ist eine Konstante mit $C \neq 1$, woraus eine Drehung des Perihels der Planetenbahn resultiert. Berechnen Sie die Verschiebung des Perihels nach einem Bahndurchlauf.

Hinweis: Es ist sinnvoll sich das Kepler-Problem noch einmal anzuschauen.

Aufgabe 1.2 (7 Punkte)**:**
Betrachten Sie einen unendlich langen und unendlich dünnen Stab mit konstanter linearer Massendichte (d.h. Masse pro Längeneinheit) λ. Wählen Sie ein kartesisches Koordinatensystem, sodass der Stab auf der z-Achse liegt.

a) Berechnen Sie die auf eine Testmasse m wirkende Kraft im Schwerefeld der Stange unter Ausnutzung des Satzes von Gauß.

   Hinweis: Verwenden Sie Symmetrieargumente, um die Richtung und Koordinatenabhängigkeit der Kraft einzuschränken. Betrachten Sie für die Anwendung des Gauß'schen Satzes einen endlichen Zylinder, dessen Symmetrieachse auf dem Stab liegt. Was passiert mit den Beiträgen der Grundflächen des Zylinders?

b) Berechnen Sie die auf eine Testmasse m wirkende Kraft im Schwerefeld der Stange, indem Sie die Stange in infinitesimale Teilmassen zerlegen und deren Kraftfelder an jedem Punkt im Raum aufaddieren.

---

bitte wenden

Aufgabe 1.3 (6 Punkte)**:**

a) Geben Sie die Form des Funktionals $F[\mathbf{x}]$ für die Weglänge im Gebirge an. Das Argument $\mathbf{x}(\tau)$ des Funktionals sei der auf Seehöhe projizierte Weg $\tau \in [0,1] \mapsto \mathbf{x}(\tau) = (x^1(\tau), x^2(\tau))$. Die topografische Höhe sei gegeben durch $z(\mathbf{x})$. Nehmen Sie an, dass die Erdkrümmung gegenüber der Weglänge vernachlässigbar ist.

b) Gegeben sei ein Bergkessel der Form

$$z(\mathbf{x}) = H_0 - \sqrt{H_0^2 - \mathbf{x}^2} = H_0 - \sqrt{H_0^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2}$$

Benutzen Sie das Ergebnis von a) um den vom Bergsteiger zurückgelegten Weg zwischen den Punkten $\mathbf{x}_0 = (-H_0/2, 0)$ und $\mathbf{x}_1 = (H_0/2, 0)$ zu berechnen, wenn er den Bergkessel geradlinig durchsteigt.

Hinweis: Eine geschickte Wahl der Parametrisierung ist: $\mathbf{x} = (-H_0/2 + H_0\tau, 0)$. Lösen Sie das zwischenzeitlich auftretende Integral $\int \mathrm{d}\xi/\sqrt{1-\xi^2}$ durch eine geeignete Substitution mit trigonometrischen Funktionen.