9. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien 19.12.2016
Besprechung in den Tutorien 09.01.2017

Aufgabe 9.1 (2 Punkte)**:**
Fortsetzung von Aufgabe 3.1

- Ein Vektor ist ein Tensor erster Stufe. Im Euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ transformiert sich jeder Vektor unter Drehungen wie folgt

  $$\vec{x}' = \overset{\leftrightarrow}{R} \cdot \vec{x}\,.$$

  Hierbei ist $\overset{\leftrightarrow}{R}$ eine 3×3 Drehmatrix mit Determinante $+1$. Eine Drehung läßt den Wert eines beliebigen Skalarprodukts unverändert/invariant, wenn man beide Vektoren auf gleiche Weise dreht

  $$\vec{x}' \cdot \vec{y}' = \vec{x} \cdot \vec{y}\,.$$

  Des Weiteren ändert eine Drehungen die relativen Winkel zwischen den Vektoren nicht. Zeigen Sie, ausgehend von der bereits bewiesenen Äquivalenz der Gleichungen (1) und (2) auf Blatt 2 innerhalb des Spezialfalls $\vec{x} = (x_1, 0, 0), \vec{y} = (y_1, y_2, 0)$ mit $x_1, y_1, y_2 > 0$, die Äquivalenz im allgemeinen Fall, indem Sie die aufgeführten Eigenschaften eines Vektors anwenden.

Aufgabe 9.2 (8 Punkte)**:**
Fortsetzung von Aufgabe 7.4

a) Integrieren Sie die erhaltene BWGL ($\hat{v}$ ist die Austrittsgeschwindigkeit des Treibstoffs)

$$\dot{v}(t) = -\,g + \frac{\alpha \hat{v}}{m_0 - \alpha t}\,,$$

unter der Annahme, dass die Rakete zur Zeit $t = 0$ aus der Ruhe startet. Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v(t)$ der Rakete.

b) Bestimmen Sie die Position der Rakete $z(t)$ für den Fall, dass $z(0) = z_0$ gilt.

c) Wie hoch fliegt die Rakete und nach welcher Zeit erreicht sie ihren höchsten Bahnpunkt? Betrachten Sie dazu $\hat{v} \geq \frac{m_0 g}{\alpha}$.

d) Was passiert für $\hat{v} < \frac{m_0 g}{\alpha}$?

---

bitte wenden

Aufgabe 9.3 (*)**:**
Zeigen Sie, dass für die zeitliche Änderung eines Vektors $\vec{b}$ konstanter Länge, der um eine raumfeste Achse in Richtung $\vec{n}$ ($|\vec{n}| = 1$) mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$ rotiert, folgende Gleichung gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{b}$$

Aufgabe 9.4 (2 Punkte)**:**
Für einen gedämpften harmonischen Oszillator mit der BWGL

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,,$$

erhält man im Kriechfall $\omega_0^2 = \gamma^2$ die allgemeine Lösung ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$x(t) = ae^{-\gamma t} + bte^{-\gamma t}\,.$$

Bestimmen Sie im Kriechfall für die Anfangsbedingungen bei $t_0 = 0$

$$x(t_0) = x_0\,, \qquad \dot{x}(t_0) = 0\,,$$

die Auslenkung in Abhängigkeit der Zeit $x(t)$, indem Sie die zwei Kostanten a und b bestimmen.

Aufgabe 9.5 (8 Punkte)**:**
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$(i)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\,, \qquad (ii)\quad \lim_{x\to 0} x \ln x\,, \qquad (iii)\quad \lim_{x\to\infty} (1 - 2/x)^{5x}\,,$$

$$(iv)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{x^4}\,, \qquad (v)\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\cot x}{\ln x}\,, \qquad (vi)\quad \lim_{x\to 0} \frac{x \sin 2x}{\sinh^2 x}\,.$$
