Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg
Wintersemester 2016/17

8. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien 12.12.2016
Besprechung in den Tutorien 19.12.2016

Aufgabe 8.1 (8 Punkte)**:**
Bestimmen Sie jeweils die allgemeine reelle Lösung für die folgenden Differentialgleichungen

a) $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$

b) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = 0$

c) $\dddot{x} + \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$

und finden Sie die reelle Lösung des Anfangswertproblems

d) $\ddot{x} + 6\dot{x} + 25x = 0$, $x(0) = 5$, $\dot{x}(0) = -3$

Aufgabe 8.2 (6 Punkte)**:**
Eine homogene Kette der Länge L und der linearen Massendichte $\mu = m/L$ liege ausgestreckt auf einer Tischplatte. m sei dabei die Gesamtmasse der Kette. Ein Teil der Länge x_0 soll anfangs senkrecht (also in Richtung des Schwerefeldes der Erde) über die Tischkante herabhängen (die Biegung der Kette an der Kante kann vernachlässigt werden).

a) Berechnen Sie die Bewegung dieses Endes der unter ihrem eigenen Gewicht abgleitenden Kette bis zu dem Zeitpunkt T, ab dem sie frei fällt. Stellen Sie dazu die Bewegungsgleichung auf und lösen Sie diese. Sehen Sie zunächst von der Reibung ab. Die Anfangsgeschwindigkeit sei null.

b) Wie groß ist die Anfangsgeschwindigkeit des anschließenden freien Falls? Bemerkung: Die Umkehrfunktion von $\cosh(x)$ ist gegeben durch $\text{Arcosh}(x)$. Benutzen Sie die Identität $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$.

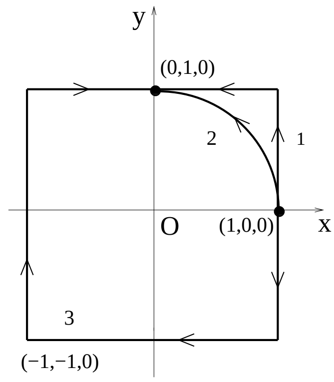
c) Die Kraft der Gleitreibung zwischen Kette und Tisch ist proportional (mit einer Proportionalitätskonstanten η) zur Länge des auf dem Tisch liegenden Teils der Kette und wirkt der Geschwindigkeit entgegen. Wie lautet die Differentialgleichung in diesem Fall? Berechnen Sie den Verlauf des Abgleitvorgangs.

---

bitte wenden

Aufgabe 8.3 (6 Punkte)**:**
Gegeben sei das Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x, 0)^T \,.$$



a) Berechnen Sie die Rotation des Kraftfelds und bestimmen sie wenn möglich ein $V(\vec{r})$ für das gilt: $-\vec{\nabla}V(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r})$.

b) Berechnen Sie die Wegintegrale $W_{C_i} = \int_{C_i} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r})\,, i \in \{1, 2, 3\}$ entlang der drei skizzierten Wege, welche alle bei $(1, 0, 0)$ beginnen und bei $(0, 1, 0)$ enden.

c) Interpretieren Sie die erhaltenen Ergebnisse.

Hinweis: Bestimmen sie bei der Berechnung von $V(\vec{r})$ zunächst die Stammfunktionen $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$

$$\int \mathrm{d}x \partial_x V(x, y) = -\int \mathrm{d}x[\vec{F}]_x = \mathcal{I}_1(x, y) + C_1(y)\,,$$
$$\int \mathrm{d}y \partial_y V(x, y) = -\int \mathrm{d}y[\vec{F}]_y = \mathcal{I}_2(x, y) + C_2(x)\,,$$

und prüfen Sie nach, ob die Integrationskonstanten $C_1(y)$ und $C_2(x)$ so gewählt werden können, dass ein übereinstimmendes Ergebnis $\mathcal{I}_1(x, y) + C_1(y) = \mathcal{I}_2(x, y) + C_2(y) = V(x, y)$ vorliegt.

Aufgabe 8.4 (*)**:**
Schließen Sie ausgehend von der Invarianz des Kronecker-δ-Tensors, unter Anwendung der Transformation $R \in \mathbb{R}_{N\times N}$, die einen Vektor wie folgt in der Matrixdarstellung transformiert $\vec{v}' = R\cdot\vec{v}$, auf die Eigenschaften von R. Die Dimension der Vektoren ist durch $\mathrm{tr}\delta = \mathrm{tr}1_{N\times N} = N$ gegeben.

a) Schreiben Sie dazu das Skalarprodukt zweier beliebiger Vektoren $[\vec{u}]_i\delta_{ij}[\vec{v}]_j = \vec{u}^T \cdot 1_{N\times N} \cdot \vec{v}$ wie angezeigt in Matrixschreibweise vor und nach Anwendung der Transformation R auf und gewinnen Sie aus der Invarianzbedingung von δ eine Relation zwischen R und R^{-1} unter der Annahme, dass sich Skalare nicht transformieren.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der unabhängigen Komponenten N_A in der Matrix R als Funktion von N, indem sie die Gleichungen $R \cdot R^T = 1_{N\times N}$, verwenden, um möglichst viele der zunächst beliebigen N^2 Komponenten in R zu eliminieren.

c) Die Anzahl der unabhängigen Komponenten N_A spiegelt die Anzahl der in R enthaltenen Freiheitsgrade der Transformation wieder. Berechnen Sie die expliziten Werte von N_A für $N \in \{2, 3, 4\}$. Machen Sie sich klar, dass N_A die maximale Anzahl der senkrecht zueinander stehenden Ebenen im Vektorraum $V = \mathbb{R}^N$ ist. Um welche Transformationen handelt es sich?

d) Eliminieren Sie für $N = 2$ explizit alle abhängigen Komponenten in R. *Hinweis*: Verwenden Sie $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$, um eine geschickte Parametrisierung zu erreichen.

e) Nutzen sie die möglichen Werte von $\det R$ aus der expliziten Parametrisierung für $N = 2$, um die Menger aller R weiter zu klassifizieren. Welche Transformation verknüpft die gefundenen Untermengen?
