Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg
Wintersemester 2016/17

7. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien 05.12.2016
Besprechung in den Tutorien 12.12.2016

Aufgabe 7.1 (6 Punkte)**:**
Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument folgender Zahlen

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{i-1}{i\sqrt{2}}\right)^3, \; z_2 = \frac{10-8i}{1+i}, \; z_1 \cdot z_2, \; e^{z_1}, \; z_1 + z_2, \; \overline{z}_1$$

Zeichnen Sie z_1 und z_2 in der Gauss'schen Zahlenebene und beschreiben Sie in Worten die geometrische Interpretation der Multiplikation, Addition und komplexen Konjugation.

Aufgabe 7.2 (8 Punkte)**:**
Betrachten Sie die am Seil hängende Masse aus Aufgabe 5.2.

a) Bisher haben wir die Parameter L, r und d als gegeben angenommen. Sind die Parameter beliebig? Welche Bedingungen müssen sie erfüllen. Geben sie die Bedingungen ausgedrückt durch $\rho = d/L$ und $\eta = (1-r)/(1+r)$ an.

   Hinweis: Die im Problem vorkommenden Winkel müssen reell sein und sich im Wertebereich $[0, \pi/2]$ befinden.

b) Welche physikalisch denkbare Situation wird durch unsere Parametrisierung nicht beschrieben? Bestimmen Sie das minimale ρ, welches bei gegebenenem η mit der Parametrisierung als Grenzfall der gesuchten Situation noch erfasst werden kann.

   Hinweis: In welcher Konfiguration wird durch ein Seilstück keine Kraft übertragen?

c) Bestimmen Sie für den Fall $0 < \rho \ll 1$ die Seilaufteilung r, die zur geringsten Maximalbelastung des Seils führt. Drücken Sie dazu die bekannten Seilkräfte durch η und ρ aus und entwickeln Sie sie in führender Ordnung um kleine ρ. Achten Sie bei der Entwicklung darauf, dass die in a) gewonnenen Bedingungen erfüllt sind, um im physikalischen Bereich zu bleiben.

   Hinweis: Sie dürfen nicht annehmen, dass $\rho \ll \eta$ gilt.

d) Ist die in c) gefundene Seilaufteilung auch für $\rho \approx 1$ geeignet? Wo findet sich in diesem Bereich das r mit der geringsten Maximalbelastung des Seils? Eine qualitative Erklärung in Worten ist hier ausreichend.

bitte wenden

Aufgabe 7.3 (6 Punkte)**:**

a) Gegeben seien eine skalare Funktion $\phi(\vec{r})$ und eine vektorielle Funktion $\vec{f}(\vec{r})$, die zweimal stetig partiell differenzierbar sind. Zeigen Sie, dass gilt

$$
\begin{array}{ll}
\text{(i)} & \operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi(\vec{r}) = 0\,, \\
\text{(ii)} & \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{f}(\vec{r}) = 0\,, \\
\text{(iii)} & \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi(\vec{r}) = \triangle\,\phi(\vec{r})\,, \\
\text{(iv)} & \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{f}(\vec{r}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{f}(\vec{r}) - \triangle\,\vec{f}(\vec{r})\,, \\
\text{(v)} & \operatorname{div}\left(\phi(\vec{r})\,\vec{f}(\vec{r})\right) = \vec{f}(\vec{r})\cdot\operatorname{grad}\phi(\vec{r}) + \phi(\vec{r})\operatorname{div}\vec{f}(\vec{r})\,,
\end{array}
$$

wobei der Laplace-Operator „$\triangle$“ gegeben ist durch

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

Hinweis: $\operatorname{div}\vec{f} = \vec{\nabla}\cdot\vec{f} = \sum_i [\vec{\nabla}]_i[\vec{f}]_i$.

b) Betrachten Sie nun die Funktion $\vec{f}(\vec{r}) = \psi(r)\frac{\vec{r}}{r}$ mit $r = |\vec{r}|$. $\psi(r)$ sei eine differenzierbare skalare Funktion. Berechnen Sie

$$\text{(i)}\quad \operatorname{div}\vec{f}(\vec{r}) \quad \text{und} \qquad \text{(ii)}\quad \operatorname{rot}\vec{f}(\vec{r})\,.$$

Aufgabe 7.4 (*)**:**
Raketen werden durch den Rückstoß der ausgestoßenen Gase angetrieben. Die Masse der Rakete nimmt in dem Maß ab, in dem der Treibstoff verbraucht wird. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für eine Rakete, die in einem homogenen Gravitationsfeld vertikal aufwärts fliegt. Leiten Sie diese Gleichung unter der Annahme her, dass die Rakete die Verbrennungsgase mit konstanter Rate α (verbrannte Treibstoffmasse pro Sekunde) und konstanter Geschwindigkeit v_0 relativ zur Rakete in Richtung des Gravitationsfeldes ausstößt. Der dabei entstehende Rückstoß bewirkt eine Impulsänderung pro Zeit.

(Fortsetzung folgt)