6. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien 28.11.2016
Besprechung in den Tutorien 05.12.2016

Aufgabe 6.1 (5 Punkte)**:**
Betrachten Sie das eindimensionale Potential

$$V(x) = -\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}, \quad \alpha, \beta > 0$$

für $x > 0$. Berechnen Sie die ersten zwei Terme der Taylor-Entwicklung des Potentials um das Minimum. Berechnen Sie anschließend die Kreisfrequenz ω der Schwingung eines Teilchens der Masse m bei kleinen Auslenkungen um die Ruhelage.

Aufgabe 6.2 (6 Punkte)**:**
Ein Massenpunkt mit zeitlich konstanter Masse m bewegt sich in einer Dimension unter dem Einfluß einer Kraft $F(x)$.

a) Leiten Sie ausgehend von der Gleichung

$$F(x) = m\ddot{x} \tag{1}$$

den Energieerhaltungssatz her. Drücken Sie dazu die Kraft $F(x)$ durch das zugehörige Potential $V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\mathrm{d}x'$ aus, multiplizieren Sie die Gleichung (1) mit $\dot{x}$ und integrieren Sie über t.

b) Die in (a) eingeführte Integrationskonstante kann als Gesamtenergie E interpretiert werden. Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion der Bahnkurve $t(x)$ durch

$$t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{E - V(x')}} \tag{2}$$

gegeben ist, wobei das Vorzeichen von den Anfangsbedingungen abhängt und $x(t_0) = x_0$.

c) *i)* Berechnen Sie das Integral (2) für den Spezialfall $F(x) = -kx$ und die Anfangsbedingung $x(0) = x_0\,, \dot{x}(0) = 0$ bei $t_0 = 0$.

ii) Skizzieren Sie die resultierende Bahnkurve $x(t)$.

iii) Skizzieren Sie das zugehörige Potential $V(x)$ und bestimmen Sie die Umkehrpunkte der Bewegung.

bitte wenden

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)**:**
Berechnen Sie

a) die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{2}{x}y + \frac{\ln x}{x^2}$$

b) die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = -2xy + 2xe^{-x^2} \;, \quad y(0) = 2$$

Aufgabe 6.4 (5 Punkte)**:**
Verifizieren Sie den Satz von Stokes an folgendem Beispiel, indem Sie sowohl das Kurvenintegral als auch das Flächenintegral auswerten: Das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{x})$ sei gegeben durch

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x^2 - 3y \\ 4yz \\ 3x^2 z \end{pmatrix} .$$

Als Integrationsbereich wählen Sie das Quadrat dessen Ecken sich an den Punkten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

befinden. Fassen Sie das Integral über die Fläche einfach als Produkt zweier Integrale auf.

Aufgabe 6.5 (*)**:**
Ein Keil liegt rutschfest auf einer Waage. Seine Oberfläche stellt eine schiefe Ebene mit Neigungswinkel α dar. Auf dieser Oberfläche befindet sich, irgendwie befestigt, eine Masse m. Die Waage zeigt ihr Gewicht an. Nun wird die Befestigung gelöst und die Masse gleitet reibungslos die schiefe Ebene hinab. Ändert sich die Anzeige der Waage? Und wenn ja, wie?
