4. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien 14.11.2016
Besprechung in den Tutorien 21.11.2016

Aufgabe 4.1 (4 Punkte)**:**
Betrachten Sie die Teilchenbewegung aus Aufgabe 2.2 von Übungsblatt 2.
Berechnen Sie $\vec{T}(t) = \vec{v}(t)/|\vec{v}(t)|$ und $(\mathrm{d}\vec{T}/\mathrm{d}s)(t) = (\mathrm{d}\vec{T}(t)/\mathrm{d}t) \cdot (\mathrm{d}t/\mathrm{d}s)(t)$. Berechnen Sie außerdem $\vec{N}(t=0)$.
Hinweis: Sie müssen hierzu nicht den Ausdruck $s(t)$ invertieren. Benutzen Sie einfach die Ableitung der inversen Funktion.

Aufgabe 4.2 (6 Punkte)**:**
Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass

$$\int \sqrt{ax^2+2bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{ac-b^2}{2a^{3/2}}\mathrm{Arsinh}\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}} + \frac{ax+b}{2a}\sqrt{ax^2+2bx+c}\,,$$

falls $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$. Möglicher Lösungsweg:

(a) Finden Sie eine Substitution der Form $y = x - x_0$, so dass

$$ax^2 + 2bx + c = a(y^2 + y_0^2)\,.$$

Hierbei sind die Konstanten x_0 und y_0 zu bestimmen.

(b) Das resultierende Integral lässt sich mit Hilfe der Substitution $y = y_0 \sinh\phi$ lösen.

Aufgabe 4.3 (10)**:**
Ein Massenpunkt wird unter dem Winkel θ zur Horizontalen hochgeworfen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Massenpunkt am Ort $\vec{r}(0) = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$ und der Betrag der Geschwindigkeit sei $|\vec{v}(0)| = v_0$. Infolge von Stokesscher Reibung im umgebenden Medium ist die Beschleunigung durch $\vec{a} = -k\vec{v} - g\vec{e}_z$ gegeben. Durch Integration der Gleichung

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}(t)$$

erhalten Sie zunächst $\vec{v}(t)$ und dann $\vec{r}(t)$. Die jeweiligen Integrationskonstanten sind durch die Vorgabe von $\vec{v}(0) = v_0(\cos\theta, 0, \sin\theta)^{\mathrm{T}}$ und $\vec{r}(0)$ festgelegt.

bitte wenden

(a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Massenpunktes als Funktion der Zeit.

Hinweis: Führen Sie in der Gleichung $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ die Substitution $\vec{v}(t) = \vec{\phi}(t)\mathrm{e}^{-kt}$ ein und bestimmen Sie zunächst die Funktion $\vec{\phi}(t)$.

(b) Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ des Massenpunktes.

(c) Zeigen Sie, dass der Massenpunkt im Limes $t \to \infty$ eine endliche Grenzgeschwindigkeit erreicht und berechnen Sie deren Betrag.

(d) Zeigen Sie: Der höchste Bahnpunkt wird nach der Zeit

$$T = \frac{1}{k} \ln\left(1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}\right)$$

erreicht.

(e) Zeigen Sie: Die Höhe am Scheitelpunkt der Bahn ist

$$H = \frac{v_0 \sin\theta}{k} - \frac{g}{k^2} \ln\left(1 + \frac{v_0 k \sin\theta}{g}\right) .$$

(f) Zeigen Sie: Für kleine Reibung ($k \to 0$) ist die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ annähernd gegeben durch

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - g\,t\,\vec{e}_z\,, \qquad \vec{r}(t) = t\,\vec{v}_0 - \tfrac{1}{2} g t^2 \vec{e}_z\,.$$

Hinweis: Für ($k \to 0$) können Sie e^{-kt} durch $1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2$ ersetzen.

Aufgabe 4.4 (*)**:**
Gegeben Sei die DGL ($a, b, c \in \mathbb{R}$): $\dddot{x}(t) = ax(t) + b\dot{x}(t) + c\ddot{x}(t)$. Schreiben Sie die gegebene DGL dritter Ordnung ausgehend von den Definitionen $y(t) = \dot{x}(t)$ und $z(t) = \dot{y}(t)$ in ein System gekoppelter DGLs erster Ordnung um:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}(t) = \overset{\leftrightarrow}{M} \cdot \vec{r}(t)\,.$$

Bestimmen Sie dazu die Matrix $\overset{\leftrightarrow}{M}$, wobei hier $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ gilt.
