12. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien 23.01.2017
Besprechung in den Tutorien 30.01.2017

Aufgabe 12.1 (4 Punkte)**:**
Zwei Wissenschaftler starten zum gleichen Zeitpunkt am Nordpol unterschiedliche, idealisierte "Weltreisen". Der erste Wissenschafler fliegt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω über die Erdoberfläche vom Nordpole zum Südpol und ohne anzuhalten wieder zurück. Seine Geschwindigkeit sei genau so gross, dass die Fliehkraft gerade die Erdanziehungskraft kompensiert und seine Flughöhe gemessen vom Mittelpunk der Erde sei konstant durch den Erdradius gegeben. Der zweite Wissenschaftler läßt sich in einen senkrechten Tunnel fallen, der durch den Erdmittelpunkt zur anderen Seite der Erdoberfläche führt.

(a) Welcher der beiden Wissenschaftler ist als erster wieder am Nordpol, wenn Sie die Erddrehung und Luftreibung vernachlässigen und annehmen, dass die Erde nur eine Kugel mit konstanter Massendichte mit Gesamtmasse M und Radius R ist? Drücken Sie die Reisezeiten durch die Erdbeschleunigung $g \approx 9,81m/s^2$ und den Erdradius $R \approx 6371km$ aus.

(b) Welcher der beiden Wissenschaftler ist relativ zur ruhenden Erde am schnellsten unterwegs? Bestimmen Sie die Maximalgeschwindigkeit jedes Wissenschaftlers.

(c) Bestimmen Sie den Betrag der maximalen Beschleunigung für beide Wissenschaftler.

Hinweis: In der Vorlesung wird gezeigt werden, dass durch eine Kugelschale mit konstanter Massendichte keine Gravitationskräfte in ihrem Innenraum erzeugt werden. Des weiteren ist die Gravitationskraft einer Kugel mit homogener Massenverteilung im Außenraum äquivalent zu der eines Massenpunkts mit der Gesamtmasse der Kugel, welcher sich genau im Zentrum der Kugel befindet.

Aufgabe 12.2 (8 Punkte)**:**
Ein Teilchen streut am Potential

$$V(r) = \begin{cases} \infty & (r \leq R) \\ 0 & (r > R) \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie den Streuwinkel $\theta(b)$ als Funktion des Stoßparameters b, indem Sie das in der Vorlesung hergeleitete Integral für das angegebene Potential auswerten.

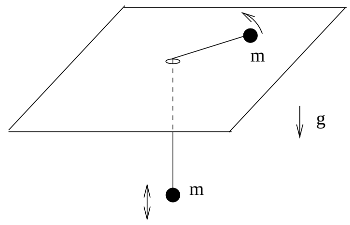
(b) Überprüfen Sie das Ergebnis durch eine geometrische Überlegung, indem Sie die obige Anordnung mit der elastischen Streuung eines Massepunktes an einer ruhenden unbeweglichen Kugel mit Radius R identifizieren.

(c) Berechnen Sie außerdem den differenziellen Wirkungsquerschnitt $\mathrm{d}\sigma(\theta)/\mathrm{d}\Omega$ sowie den totalen Wirkungsquerschnitt σ_{tot}. (Hierbei ist $\mathrm{d}\Omega$ der infinitesimale Raumwinkel.)

bitte wenden

Aufgabe 12.3 (8 Punkte)**:**

Zwei Massenpunkte der Masse m seien mit einer Schnur der Länge l miteinander verbunden (vgl. Skizze). Einer der Massenpunkte gleitet reibungsfrei auf einer horizontalen Ebene, der andere kann unter dem Einfluß der Schwerekraft eine vertikale Bewegung ausführen. Benutzen Sie zur Beschreibung des Systems ebene Polarkoordinaten (r, ϕ), wobei der Ursprung auf dem Loch sitzt, durch das die Schnur verläuft.



(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems auf. Welche Bewegungsgleichung können Sie sofort integrieren? Welcher Erhaltungssatz steckt dahinter?

(b) Zeigen Sie, dass sich der obere Massenpunkt auf Kreisbahnen bewegen kann. Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit des oberen Massenpunktes in Abhängigkeit vom Kreisradius.

(c) Zeigen Sie, dass die Bewegung des oberen Massenpunktes auf einer Kreisbahn stabil verläuft. Benutzen Sie dazu den Ansatz $r(t) = r_0 + \rho(t)$, wobei $\rho(t)$ eine kleine Störung der Kreisbahn mit Radius $r(t) = r_0$ darstellt ($\rho(t) \ll r_0$) und drücken Sie die Winkelgeschwindigkeit des oberen Massenpunktes durch seinen Drehimpuls bzgl. des Ursprungs aus. Entwickeln Sie nun die Bewegungsgleichung für $r(t)$ für kleine $\rho(t)$ und zeigen Sie, dass die Störung zu harmonischen Schwingungen um die Kreisbahn führt. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer des Systems als Funktion von Kreisradius und Erdbeschleunigung.

Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass die Schnur zu jedem Zeitpunkt gespannt ist und selbst keine Masse besitzt.

Aufgabe 12.4 (8 Bonuspunkte)**:**

Ein Koordinatensystem sei so gewählt, dass sich die Erde mit Masse M_1 am Ort $\vec{r}_1 = (0, 0, 0.9d)$ und der Mond mit Masse M_2 am Ort $\vec{r}_2 = (0, 0, -0.1d)$ befindet (d sei hierbei die momentane Distanz zwischen Erde und Mond). Die von den Massen M_i auf eine Probemasse m am Ort $\vec{r}$ wirkenden Gravitationskräfte sind durch $\vec{F}_i = -G_N m M_i \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass bei einem Verhältnis $M_2 : M_1 = 1 : 81$ das Koordinatensystem gerade so gewählt wurde, dass sein Ursprung im sogenannten abraischen, d.h. schwerelosen, Punkt liegt. Eine Entwicklung des Kraftfelds um den Ursprung in linearer Ordnung in x, y und z ergibt $\vec{F} = A(-x, -y, \beta z)$. Bestimmen Sie die Konstanten A und β.

(b) Ist das Kraftfeld $\vec{F} = A(-x, -y, \beta z)$ konservativ? Berechnen Sie das zugehörige Potential $V(\vec{r})$ und diskutieren Sie die Äquipotentialflächen $V(\vec{r}) = \text{const.}$ (Skizze in der (xz)-Ebene). Ist der abraische Punkt stabil?
