Theoretische Physik I: Klassische Mechanik
Prof. Dr. A. Hebecker
Dr. N. Zerf

Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg
Wintersemester 2016/17

11. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien 16.01.2017
Besprechung in den Tutorien 23.01.2017

Aufgabe 11.1 (8 Punkte)**:**
Für das Keplerproblem $V(r) = -\alpha/r$ ist neben Energie und Drehimpuls der Lenz'sche Vektor

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha\frac{\vec{r}}{r}$$

eine Erhaltungsgröße ($\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$).

(a) Rechnen Sie dies explizit nach, d.h. zeigen Sie unter Verwendung der Bewegungsgleichung, dass $\dot{\vec{A}} = 0$. Überprüfen Sie dazu zunächst die Relation $\dot{r} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}/r$.

(b) In welcher Ebene liegt $\vec{A}$?

(c) Bestimmen Sie die Bahnkurve $r(\varphi)$, indem Sie das Skalarprodukt von $\vec{A}$ mit $\vec{r}$ berechnen. φ sei dabei der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel. Benutzen Sie die Tatsache, dass sowohl $\vec{L}$ als auch $\vec{A}$ zeitlich konstant sind. Erinnern Sie sich an das, was Sie über die Vertauschbarkeit von Vektoren in einem Ausdruck wie $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ wissen.

(d) Welche Bedeutung haben Betrag und Richtung von $\vec{A}$?

Aufgabe 11.2 (4 Punkte)**:**
Zerlegen Sie das Produkt von zwei ε-Tensoren dritter Stufe – welche eine $SO(3)$ Invariante darstellen – unabhängig von ihrer Kontraktionsweise in eine Summe von Kronecker-δ-Tensorprodukten. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Schreiben Sie das Produkt von zwei ε-Tensor ohne Kontraktion auf und bilden Sie aus den Produkten von (unkontrahierten) δ-Tensoren alle möglichen Basistensoren, die in der Zerlegung auftauchen können. Berücksichtigen Sie dabei die Antisymmetrie der ε-Tensoren, um sich nur auf die relevanten Basistensoren beschränken zu können. Wieviele Basistensoren sind relevant?
- Superpositionieren Sie die Basistensoren so, dass sich der entstehende Tensor unter Vertauschung von Indizes wie das Produkt der zwei ε-Tensoren verhält und verwenden Sie zunächst eine noch unbestimmte, globale Normierung N des Ansatzes

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = N(\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} + \dots)\,.$$

- Bestimmen Sie die Normierungskonstante N, indem Sie explizit auf ein nicht-verschwindendes Element des Tensorprodukts zugreifen.

bitte wenden

- Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die zwei ε-Tensoren über einen Index kontrahieren. Für diesen Fall ist die Zerlegung aus der Vorlesung bekannt.

Hinweis: Wenn Sie die in der Vorlesung kurz gezeigte graphische Notation der Tensoren verwenden wollen, müssen Sie sie erst in verständlicher Form definieren!

Aufgabe 11.3 (8 Punkte)**:**
Gegeben sei eine eigentliche, orthochrone Galilei-Transformation durch die Abbildung

$$g\ :\ \begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vec{r}' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O\vec{r} - \vec{w}t - \vec{b} \\ t + s\,, \end{pmatrix}\,,$$

wobei O eine orthogonale Matrix mit $\det O = +1$ ist. Der Vektor $\vec{w}$ bezeichnet eine konstante Geschwindigkeit und $\vec{b}$ und s konstante Verschiebungen in Raum bzw. Zeit. Die Menge aller Abbildungen lässt sich durch die Elemente $g = g(O, \vec{w}, \vec{b}, s)$ beschreiben. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die Menge aller eigentlichen, orthochronen Galilei-Transformationen eine Gruppe $G_+^\uparrow$ (im mathematischen Sinne) bildet.

(a) Zeigen Sie, dass die konsekutive Ausführung von zwei beliebigen Galilei-Transformationen wieder eine Galilei-Transformation ergibt und bestimmen Sie die Parameter dieser Transformation in Abhängigkeit der Parameter der ursprünglichen Transformationen. Spielt die Reihenfolge der Ausführung eine Rolle?

(b) Man definiert die Hintereinanderausführung zweier Galilei-Transformationen durch

$$g' = g_2 \circ g_1 = g_2(O_2, \vec{w}_2, \vec{b}_2, s_2) \circ g_1(O_1, \vec{w}_1, \vec{b}_1, s_1)\,.$$

Zeigen Sie die Gruppeneigenschaften von $G_+^\uparrow$:

  (i) Die Verknüpfungsoperation ist assoziativ, d.h. $g_3 \circ (g_2 \circ g_1) = (g_3 \circ g_2) \circ g_1$.

  (ii) Es existiert ein neutrales Element $E = g(\mathbb{1}, \vec{0}, \vec{0}, 0)$, so dass für jede Transformation $g \in G_+^\uparrow$ gilt: $g \circ E = E \circ g = g$.

  (iii) Zu jedem Gruppenelement $g \in G_+^\uparrow$ gibt es eine inverse Transformation g^{-1}, so dass $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = E$.

Aufgabe 11.4 (*)**:**
Ein Massenpunkt m bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf der inneren Seite eines auf der Spitze stehenden Kegels mit dem Öffnungswinkel α. Berechnen Sie den Drehimpuls bezüglich der Spitze des Kegels und seine erste zeitliche Ableitung unter der Annahme, dass die Bahnkurve des Massenpunktes in einer horizontalen Ebene verläuft, die sich im Abstand d von der Spitze des Kegels befindet. Bestimmen Sie die erhaltenen Komponenten des Drehimpulses, ohne die explizite Lösung des Ortsvektor in Abhängigkeit der Zeit einzusetzen. Berechnen Sie auch den Betrag des Drehimpulses und drücken Sie ihn vollständig durch d, α, m und ω aus.
