10. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien 09.01.2017
Besprechung in den Tutorien 16.01.2017

Aufgabe 10.1 (3 Punkte)**:**
Die kartesischen Koordinaten eines Ortsvektors $\vec{r}$ lassen sich durch Zylinderkoordinaten ausdrücken, welche für $r \in [0, \infty)\,, \phi \in [0, 2\pi]$ und $z \in (-\infty, \infty)$ wie folgt definiert sind:

$$Z\ :\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \vec{r}(r,\phi,z) = \begin{pmatrix} x(r,\phi,z) \\ y(r,\phi,z) \\ z(r,\phi,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial\vec{r}(r,\phi,z)}{\partial r}}{\left|\frac{\partial\vec{r}(r,\phi,z)}{\partial r}\right|}\,, \vec{e}_\phi = \frac{\frac{\partial\vec{r}(r,\phi,z)}{\partial \phi}}{\left|\frac{\partial\vec{r}(r,\phi,z)}{\partial \phi}\right|}\,, \vec{e}_z = \frac{\frac{\partial\vec{r}(r,\phi,z)}{\partial z}}{\left|\frac{\partial\vec{r}(r,\phi,z)}{\partial z}\right|}$$

und bestimmen Sie ihre Skalar- und Kreuzprodukte. Machen Sie sich die Bedeutung der Einheitsvektoren mit Hilfe einer Skizze klar.
Hinweis: Das Symbol „∂“ bezeichnet eine partielle Ableitung. Die Regeln sind analog zur „gewöhnlichen“ Ableitung, wobei die restlichen Variablen als konstant angenommen werden.

Aufgabe 10.2 (8 Punkte)**:**
Die kartesischen Koordinaten eines Ortsvektors $\vec{r}$ lassen sich durch Kugelkoordinaten ausdrücken, welche für $r \in [0, \infty)\,, \theta \in [0, \pi]$ und $\phi \in [0, 2\pi]$ wie folgt definiert sind:

$$K\ :\ \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \vec{r}(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} x(r,\theta,\phi) \\ y(r,\theta,\phi) \\ z(r,\theta,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial\vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial r}}{\left|\frac{\partial\vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial r}\right|}\,, \vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial\vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial \theta}}{\left|\frac{\partial\vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial \theta}\right|}\,, \vec{e}_\phi = \frac{\frac{\partial\vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial \phi}}{\left|\frac{\partial\vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial \phi}\right|}$$

und bestimmen Sie ihre Skalar- und Kreuzprodukte.
(b) Berechnen Sie die erste zeitliche Ableitung der oben definierten Einheitsvektoren. Drücken Sie das Ergebnis durch die Vektoren $\vec{e}_r\,, \vec{e}_\theta\,, \vec{e}_\phi$ und die Parameter r, ϕ, θ, sowie ihre ersten zeitlichen Ableitungen aus.

(c) $\vec{r}(t)$ beschreibe die Bahn eines Massenpunktes in Abhängigkeit von der Zeit t. Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Massenpunktes in Kugelkoordinaten. Drücken Sie das Ergebnis durch die Vektoren $\vec{e}_r\,, \vec{e}_\theta\,, \vec{e}_\phi$ aus.

(d) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten.

---

bitte wenden

Aufgabe 10.3 (9 Punkte)**:**
Bestimmen Sie die von den Scheinkräften verursachte horizontale Ablenkung eines frei fallenden Teilchens im Gravitationsfeld der Erde. Gehen Sie anhand der folgenden Anleitung vor:

- Vernachlässigen Sie die Kräfte aufgrund der Änderung der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ($\dot{\vec{\omega}} \simeq 0$). Desweiteren falle das Teilchen aus einer geringen Höhe, so dass die Erdbeschleunigung für die Rechnung als konstant angesehen werden kann. Luftreibung etc. können Sie ebenfalls vernachlässigen.

- Wählen Sie an einem Punkt der Erdoberfläche mit Breitengrad φ lokal ein Koordinatensystem, dessen Basisvektoren nach Osten, Norden und vertikal nach oben zeigen. Drücken Sie $\vec{\omega}$ in dem so gewählten Korrdinatensystem aus.

- Betrachten Sie die Winkelgeschwindigkeit $\omega = |\vec{\omega}|$ der Erdrotation als kleinen Parameter. Vernachlässigen Sie die Terme der Scheinkräfte, welche quadratisch oder in noch höherer Ordnung von ω abhängt.

- Bestimmen Sie die Lösung $\vec{r}_0(t)$ der Bewegungsgleichungen für den Grenzfall $\vec{\omega} = 0$.

- Machen Sie den Ansatz $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \omega\vec{u}(t)$ und bestimmen Sie $\vec{u}(t)$. Vernachlässigen Sie wiederum alle Terme, die quadratisch oder in höherer Ordnung von ω abhängen.

- Zeigen Sie, dass ein Teilchen, welches bei 45° nördlicher Breite aus 100 m Höhe fallengelassen wird, um 1.55 cm nach Osten abgelenkt wird.