Universität Heidelberg
Interdisziplinäres Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen

Dr. Andreas Potschka

Übungsblatt 2

Einführung in die Numerik, Sommersemester 2017

1. **Landau-Notation** (6 · 1 = 6 Punkte)
   Man schreibe die folgenden Ausdrücke in der Form $f(h) = O(h^p)$, für $h \to 0^+$ mit möglichst großem $p \in \mathbb{N}$, bzw. $g(n) = O(n^q)$ für $n \to \infty$ mit möglichst kleinem $q \in \mathbb{N}$:

$$(a) \quad f(h) = 4(h^2+h)^2 - 4h^4, \qquad (b) \quad g(n) = 4(n^2+n)^2 - 4n^4,$$
$$(c) \quad f(h) = \frac{e^h - e^{-h}}{2h} - 1, \qquad (d) \quad g(n) = \sup_{x>0} \frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}.$$

   Man schreibe die folgenden Ausdrücke in der Form $f(h) = O(h^p)$ bzw. $f(h) = o(h^p)$ mit einem möglichst großen $p \in \mathbb{N}$:

$$(e) \quad f(h) = \frac{\sin(1+h) - 2\sin(1) + \sin(1-h)}{h^2} + \sin(1);$$
$$(f) \quad f(h) = \frac{1}{\ln(h)}.$$

2. **Konditionierung** (4 · 1 = 4 Punkte)
   Man untersuche die Konditionierung der folgenden Rechenoperationen:

$$(a) \quad f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2} \quad (x_2 \neq 0), \qquad (b) \quad f(x_1, x_2) = x_1^{x_2} \quad (x_1 > 0).$$

   Sind die einfachen Operationen $f(x) = 1/x$ und $f(x) = \sqrt{x}$ gut konditioniert?

3. **Konditionierung und Stabilität** (1 + 1 + 2 = 4 Punkte)
   Wir betrachten die Ausdrücke

$$a(x) = \frac{1-x}{1+2x} - \frac{1-2x}{1+x}, \quad \text{und} \quad b(x) = \frac{3x^2}{(1+2x)(1+x)}.$$

   (a) Zeigen sie: Die Ausdrücke stellen für $x > 0$ dieselbe Funktion $f(x)$ dar.
   (b) Wie sieht es mit der Konditionierung der jeweiligen numerischen Aufgaben aus, $f(x)$ für $0 < |x| \ll 1$ aus diesen Darstellungen zu berechnen?
   (c) Wie würde man bei der praktischen Auswertung von $f(x)$ für $0 < |x| \ll 1$ zur Gewährleistung guter numerischer Stabilität vorgehen?

4. **Relativer Fehler** (2 Punkte)
   Wie groß ist in erster Näherung der relative Fehler bei der Bestimmung der Molmenge m eines idealen Gases (mit Gaskonstante $\gamma = 0,082$) aus der Formel

$$m(P, V, T) = \frac{PV}{\gamma T},$$

   wenn die Temperatur T mit $200 \pm 0,5$ Grad, der Druck P mit $2 \pm 0,01$ atm und das Volumen V mit $10 \pm 0,2$ l bestimmt wurden. Welche Messung muß verfeinert werden, um den Fehler unter 1% zu drücken?

PA. **Taylorpolynome zur Approximation der Exponentialfunktion**

($3 + 3 + 3 + 1 = 10$ Punkte)

Wir betrachten die Polynome n-ten Grades, die durch Abschneiden der Taylorentwicklung von $\exp(x)$ entstehen

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \to \exp(x) \quad \text{für } n \to \infty.$$

(a) Schreiben sie eine Funktion `taylor_exp(n, x)`, die mithilfe einer `for`-Schleife $T_n(x)$ als Approximation von $\exp(x)$ ausrechnet.

(b) Geben sie eine modifizierte Version `taylor_exp_vec(n, x)` ohne `for`-Schleife an, die NumPy und Vektorisierung benutzt.
Hinweise: Lesen Sie sich die Hilfe zu den NumPy-Funktionen `cumprod`, `append` und `polyval` durch. Sie benötigen dann noch eine Möglichkeit, die Reihenfolge der Einträge eines NumPy-Vektors `v` umzukehren. Benutzen sie dazu die Slicing-Notation `v[start:end:step]` von Python, deren Ergebnis die Einträge von `v` beginnend mit dem Index `start` bis ausschließlich Index `end` mit einer Schrittweite von `step` zurückliefert. Jedes der drei Argumente kann weggelassen werden, wobei per default `start` als 0 angenommen wird, `end` als Länge des Vektors und `step` als 1. Ist `step` negativ, so vertauschen sich die default-Werte von `start` und `end`. Der Ausdruck `v[::-1]` liefert also einen Vektor zurück, der die Einträge von `v` in umgekehrter Reihenfolge enthält.

(c) Plotten sie für beide Varianten für $n \in \{0, 1, \ldots, 20\}$ den relativen Fehler für die Argumente $x \in \{10, 1, -1, -10\}$ und erklären sie die schlechten Ergebnisse für negative Argumente.
Hinweise: Benutzen sie die NumPy-Funktion `exp(x)` zur Ermittlung des exakten Wertes (auch wenn das Ergebnis nur bis auf den Rundungsfehler genau ist). Die Betragsfunktion heißt `abs`. Weiterhin können sie `for`-Schleifen mit `[...]`-Listen benutzen, beispielsweise:

```
for x in [10.0, 1.0, -1.0, -10.0]:
    print(x) # or do something more interesting
```

(d) Modifizieren sie ihre Funktionen so, dass positive und negative Argumente gleich gut behandelt werden können und plotten sie die Fehler erneut.

Abgabe bis Donnerstag, 04.05.2017, 14:15 Uhr.

Webseite:
http://typo.iwr.uni-heidelberg.de/groups/mobocon/teaching/numerik-0-ss17