Methoden der mathematischen Physik I (Salmhofer)

Robin Heinemann

6. Mai 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Analysis

1.1 Kurven und Wegintegrale in der Ebene

1.1.1 Orientierte Kurven

$\mathbb{R}^d, d \geq 1$

Definition 1.1 (Kurve) Eine Abbildung $\gamma : [t_a, t_b] \to \mathbb{R}^d, t \mapsto \gamma(t)$ mit $\gamma\big|_{(t_a,t_b)} \in C^1$ und

$$\dot{\gamma}(t) := \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t)$$

bezeichnen wir als **parametrisierte Kurve** mit der **Bahn** $\gamma([t_a, t_b])$

Definition 1.2 (Umparametrisierung) $\theta_a < \theta_b, \varphi : [\theta_a, \theta_b] \to [t_a, t_b]$ Homomorphismus, $\varphi\big|_{(\theta_a,\theta_b)}$ C^1-Diffeomorphismus. Die Umparametrisierte Kurve ist definiert als $\gamma' : [\theta_a, \theta_b] \to \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}\gamma' &= \gamma \circ \varphi \\ \gamma'(\theta) &= \gamma(\varphi(\theta)) \\ \frac{\mathrm{d}\gamma'}{\mathrm{d}\theta} &= \varphi'(\theta)\gamma'(\varphi(\theta))\end{aligned}$$

Definition 1.3 (Orientierte Kurven) $\gamma \sim \gamma' \iff \gamma'$ geht aus γ durch eine **orientierungserhaltende** Umparametrisierung hervor. Dabei bedeutet orientierungserhaltend

$$\begin{aligned}\varphi(\theta_a) = t_a, \varphi(\theta_b) = t_b \\ \varphi'(\theta) > 0 \forall \theta \in (\theta_a, \theta_b)\end{aligned}$$

Orientierte Kurven sind Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$, $\mathcal{C} = [\gamma]$, $-\mathcal{C} =$ die Kurve, di umgekehrt orientiert ist.

$$\begin{aligned}&\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d, \mathcal{C} = [\gamma] \\ \implies &\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^d \tilde{\gamma}(t) = \gamma(1-t) \\ &-\mathcal{C} := [\tilde{\gamma}]\end{aligned}$$

Definition 1.4 (Zusammensetzung) $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^d, \gamma_2[0,1] \to \mathbb{R}^d$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Dann ist die zusammengesetze Kurve definiert als $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(t) &= \gamma_1(2t) \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \tilde{\gamma}(t) &= \gamma_2(2t-1) \quad t \in [\frac{1}{2}, 1]\end{aligned}$$

1.1.2 Linienintegrale (Wegintegrale)

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\gamma : [t_a, t_b] \to \mathbb{R}^d, \gamma([t_a, t_b]) \subset \Omega$. Vektorfeld $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \mapsto F(x)$$

$$I_\gamma(F) := \int_{t_a}^{t_b} F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t = \int_{[\gamma]} F(x)\mathrm{d}x$$

Lemma 1.5 $I_\gamma(F)$ ist reparametrisierungsinvarant.

Beweis Übungen (Kettenregel + Transformationsatz) □

Mit einer beliebigen Parametrisierung von $\mathcal{C}$

$$W(F,\mathcal{C}) := \int_{t_a}^{t_b} F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t$$
$$W(F,-\mathcal{C}) = -W(F,\mathcal{C})$$

1.1.3 Die Green'sche Formel

$d = 2, \Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen

$$F : W \to \mathbb{R}^2 \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x_1,x_2) \\ F_2(x_1,x_2) \end{pmatrix}$$

Ω enthalte $\bar{\Delta}$

$$\Delta = \{(x_1,x_2) \in (0,a) \times (0,b) : x_2 \leq f(x_1)\}$$

f strikt monoton fallend, C^1. $f'(x_1) < 0 \forall x_1 \in (0,a)$

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\Delta} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) &= \int_0^b \mathrm{d}x_2 \int_0^{f^{-1}(x_2)} \mathrm{d}x_1 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \int_0^a \mathrm{d}x_1 \int_0^{f(x_1)} \mathrm{d}x_2 \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\
&= \int_0^b \mathrm{d}x_2 \big(F_2\big(f^{-1}(x_2), x_2\big) - F_2(0,x_2)\big) - \int_0^a \mathrm{d}x_1 (F_1(x_1, f(x_1)) - F_1(x_1,0)) \\
&= \int_0^a \mathrm{d}x_1 F(x_1,0) - \int_0^b \mathrm{d}x_2 F_2(0,x_2) + \int_0^b \mathrm{d}x_2 F_2\big(f^{-1}(x_2),x_2\big) - \int_0^a \mathrm{d}x_1 F_1(x_1, f(x_1)) \\
&= \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot \mathrm{d}x + \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot \mathrm{d}x - \underbrace{\int_0^b \mathrm{d}x_1 (F_1,F_2)(x, f(x_1)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_1) \end{pmatrix}}_{\int_{\mathcal{C}_3} F \cdot \mathrm{d}x} \\
&=: \int_{\partial\Delta} F \cdot \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Dabei ist $\mathcal{C}_1$ die Kurve (Gerade) 0 bis a entlang der x_1-Achse, entsprechend $\mathcal{C}_2$ die Kurve (Gerade) von 0 bis b entlang der x_2-Achse und $\mathcal{C}_3$ die Kurve entlang $f(x)$

Beispiel 1.6

$$f(x_1) = b\left(1 - \frac{x_1}{a}\right) \qquad \text{(Dreieck)}$$
$$f(x_1)tb\sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2} \qquad \text{(Viertelkreis)}$$

Rechteck kann man in zwei Dreiecke zerlegn, einen Kreis in vier Viertelkreise. Ein beliebiges Kreissegment in ein Dreieck und eine Viertelellipse.

Definition 1.7 ("Endlich zerlegbare Menge") $A \subset \mathbb{R}^2$, A endlich zerlegbar : $\iff$ A ist offen und $\bar{A}$ ist kompakt, $\bar{A}$ kann durch Schnitte längs Geraden in endlich viele Menge der Art wie Δ zerlegt werden.

1.1.4 Satz von Green und Stoken

$A \subset \mathbb{R}^2$ zergelbar, F ein C^1-Vektorfeld, das auf einer offenen Umgebung von A definiert ist

$$\implies \iint\limits_A \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) = \int_{\partial A} F \cdot \mathrm{d}x$$

1.1.5 Komplexe Zahlen

Körper auf $\mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\begin{aligned} (a,b) + (c,d) &:= (a+c, b+d) \\ (a,b) \cdot (c,d) &:= (ac - bd, ad + bc) \\ \implies (0,1) \cdot (0,1) &= (-1, 0) \\ \implies (x,0) \cdot (\tilde{x}, 0) &= (\tilde{x}, 0) \\ \implies i &:= (0,1) \end{aligned}$$

Offensichtliche Einbettung von $z = x + iy$ in den 2d Raum durch

$$\begin{aligned} x &= \Re z \\ y &= \Re z \end{aligned}$$

Komplexe Konjugation:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= x - iy \\ \overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w} \\ \overline{z \cdot w} &= \bar{z} \cdot \bar{w} \end{aligned}$$

$\implies \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

1.1.6 Komplexe Funktionen

allgemeine Funktionen zweier reeller Variablen (x, y). Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2 \leftrightarrow$ Absolutbetrag komplexer Zahlen

$$|z| = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2} \quad z = x + iy$$

Kovention: $A \subset \mathbb{C}$

- $\bar{A} =$ Abschluss von A in $|\cdot|$
- $A^* = \{\bar{z} \mid z \in A\}$

Definition 1.8 (Linearität) $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto L(z)$.
L ist $\mathbb{R}$-linear, wenn L additiv ist und $\forall \lambda \in \mathbb{R} : L(\lambda z) = \lambda L(z)$. L ist $\mathbb{C}$-linear, wenn L additiv ist und $\forall \lambda \in \mathbb{C} : L(\lambda z) = \lambda L(z)$.

Beispiel 1.9 $z \mapsto wz$ mit festem $w \in \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$ linear.

Lemma 1.10 L $\mathbb{R}$-linear $\implies \exists! w, \tilde{w} \in \mathbb{C} \forall z \in \mathbb{C}$:

$$L(z) = wz + \tilde{w}\bar{z}$$

L C-linear $\iff \tilde{w} = 0$

Beweis Bewersidee: $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, l hat bezüglich $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(0,1)$ Matrixgestalt

$$\begin{aligned}
A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{u} & \tilde{v} \\ \tilde{v} & -\tilde{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \\
u = \frac{a+d}{2}, \tilde{u} = \frac{a-d}{2}, v = \frac{c-b}{2}, \tilde{v}\frac{c+b}{2} \\
\to (ux - vy, vx + uy)
\end{aligned}$$

□

Beispiel 1.11 (komplexe Funktionen)

$$\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad z \in \mathbb{C} \\
e^{z+w} &= e^z e^w \\
\cos z &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \\
\sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \\
\cosh z &= \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right) \\
\sinh z &= \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) \\
\implies e^{i\varphi} &= \cos\varphi + i \sin\varphi \\
z &= |z| e^{i\varphi} \\
\log z &= \ln|(|z) + i\varphi
\end{aligned}$$

1.1.7 reelle und komplexe Differenzierbarkeit

$\Omega \subset \mathbb{C}$ offen

Definition 1.12 (reelle Differenzierbarkeit) $f : \Omega \to \mathbb{C}$ int in $z_0 \in \Omega$ reell differenzierbar, wenn $\exists L$: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathbb{R}$-linear, sodass

$$\forall \delta \in \mathbb{C}, \delta \to 0 \quad f(z_0 + \delta) - f(z_0) = L(\delta) + \wr(|\delta|)$$

f auf Ω reell differenzierbar, wenn f in jedem $z_0 \in \Omega$ reell differenzierbar ist.

$$\begin{aligned}
f(z) = r(z) + is(z) \leftrightarrow \begin{pmatrix} r(x,y) \\ s(x,y) \end{pmatrix} \\
L = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial r}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial s}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial s}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Definition 1.13 (komplexe Differenzierbarkeit) f komplex differenzieibar in $z_0 \in W$

$$:\iff \exists w \in \mathbb{C} \forall \delta \in \mathbb{C}, \delta \to 0 : f(z_0 + \delta) - f(z_0) = w\delta + \wr(|\delta|)$$

$f'(z_0) := w$. f heißt auf Ω holomorph, wenn f in jedem $z_0 \in \Omega$ komplex differenzierbar ist und $z_0 \mapsto f'(z_0)$ stetig. Die Stetigkeitsbedingung kann man weglassen, dies wird hier haber nicht getan, da es nicht notwendig ist für den Stoff der Vorlesung und der Weglassen der Stetigkeit das weitere Vorgehen damit nur unnötig erschwert. Komplexe Differenzierbarkeit $\leftrightarrow$

$$f'(z_0) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(z_0 + \delta) - f(z_0)}{\delta}$$

Lemma 1.14 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen) $f = r + is$ ist in $z = x + iy$ komplex differenzierbar

$$\begin{aligned} &\iff \frac{\partial r}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial s}{\partial y}(x,y) \\ &\text{und} \quad \frac{\partial r}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial s}{\partial x}(x,y) \end{aligned}$$

Satz 1.15 Es gelten die üblichen Differentiationsregeln.

Beispiel 1.16 $z \mapsto z^2$

$$(z + \delta)^2 - z^2 = 2z\delta + \delta^2$$

$z \mapsto |z|^2 = \bar{z}z = x^2 + y^2$. Für $z = 1$ betrachte zunächst $\delta = ih, h \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &|1 + ih|^2 - |1|^2 = 1 + h^2 - 1 = h^2 \\ \implies &\lim_{h \to 0} \frac{|1 + ih|^2 - |1|^2}{h} = 0 \end{aligned}$$

nur sei $\delta = h, h \in \mathbb{R}$

$$\frac{|1 + h|^2 - |1|^2}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = 2 + h \stackrel{!}{=} 0$$

1.2 Der Cauchy'sche Integralsatz

1.2.1 komplexe Linienintegrale

$\gamma : [t_a, t_b] \to \mathbb{C}$ C^2-Kurve

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \in \mathbb{C}$$

$\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig, $\gamma([t_a, t_b]) \subset \Omega$

$$\int_{[\gamma]} f(z)\mathrm{d}z := \int_{t_a}^{t_b} f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t$$

$\cdot$ ist hierbei **nicht** das Skalarprodukt, sondern das komplexe Produkt.

$$\begin{aligned}
f &= r + is \\
f(x,y) &= \begin{pmatrix} r(x,y) \\ s(x,y) \end{pmatrix} \\
\gamma(t) &= x(t) + iy(t) \\
\gamma(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\
f\dot{\gamma} &= (r+is)(\dot{x}+i\dot{y}) = (r\dot{x} - s\dot{y}) + i(s\dot{x} + r\dot{y}) \\
&= (r,-s)\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + i(s,r)\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \\
\int_{t_a}^{t_b} f\cdot\dot{\gamma}\mathrm{d}t &= \int_{[\gamma]} (r,-s)\cdot\mathrm{d}x + i\int_{[\gamma]}(s,r)\cdot\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

1.2.2 Der Cauchy'sche Integralsatz

Wenn $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ (das heißt reell differenzierbar und Ableitung stetig), $A \subset \Omega$, endlich zerlegbar

$$\begin{aligned}
\int_{\partial A} f(z)\mathrm{d}z &= \int_{\partial A}(r,-s)\mathrm{d}x + i\int_{\partial A}(s,r)\mathrm{d}x \\
&\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Green}}}{=} \iint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\partial(-s)}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial y}\right) + i\iint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial y}\right) \\
&= 0 \quad \text{wenn } f \textbf{ komplex} \text{ differenzierbar ist!}
\end{aligned}$$

Satz 1.17 (Cauchy'scher Integralsatz) Wenn $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen ist, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph dann gilt für jedes endliche zerlegbare $A \subset \mathbb{C}$ mit $\bar{A} \subset \Omega$

$$\int_{\partial A} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

1.2.3 Stammfunktionen und Linienintegrale

Satz 1.18 $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $F : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $f = F'$. Dann gilt für jede stückweise C^1-Kurve $[\gamma]$

$$\int_{[\gamma]} f(z)\mathrm{d}z = F(z_1) - F(z_0)$$

wenn z_0 der Anfangspunkt und z_1 der Endpunkt von $[\gamma]$ ist.

Beweis Sei zunächst $[\gamma]$ eine C^1-Kurve und $\gamma : [t_0, t_1] \to G$ eine Parametrisierung von $[\gamma]$, wobei $\gamma(t_0) = z_0$ und $\gamma(t_1) = z_1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{[\gamma]} f(z)\mathrm{d}z &= \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^{t_1} F'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\gamma(t))\mathrm{d}t \\
&= F(\gamma(t_1)) - F(\gamma(t_0)) \\
&= F(z_1) - F(z_0)
\end{aligned}$$

□

wobei im dritten Schritt die Kettenrigel verwendet wurde. Im allgemeinen Fall besteht $[\gamma]$ aus mehreren Stücken, die zusammengesetzt werden und auf obiges Argument anwendbar ist. Da der Endpunkt des k-ten Stücks der Anfangspunkt des $k+1$-ten ist, erhält man eine Teleskopsumme.

1.2.4 Grundlegende Beispiele

Beispiel 1.19

$$\begin{aligned} \int_{|z-z_0|} &= rf(z)\mathrm{d}z := \int_{\partial B_r(z_0)} f(z)\mathrm{d}z \\ B_r(z_0) &= \{z \mid |z-z_0| < r\} \\ |z-z_0| &= r \\ \implies z - z_0 &= re^{i\theta} \\ \implies z &= z_0 + re^{i\theta} = z(\theta) \end{aligned}$$

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta f(z(\theta)) \cdot \dot{z}(\theta) = \int_0^{2\pi} ire^{i\theta} f\left(z_0 re^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta$$

Lemma 1.20 $A \subset \mathbb{C}$ endlich zerlegbar und $0 \notin \bar{A}$. Dann gilt

$$\int_{\partial A} \frac{\mathrm{d}z}{z^n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Wenn $0 \in A$, dann

$$\int_{\partial A} \frac{\mathrm{d}z}{z^n} = \begin{cases} 2\pi i & n = 0 \\ 0 \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis $z_0 = 0$

$$\begin{aligned} \int_{|z|=r} \frac{\mathrm{d}z}{z^n} &= \int_0^{2\pi} ire^{i\theta} \frac{1}{\left(re^{i\theta}\right)^n} \mathrm{d}\theta \\ &= ir^{1-n} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta(n-1)} \mathrm{d}\theta \\ &= \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

□

1.2.5 Die Cauchy'sche Integralformel

Satz 1.21 (Cauchy'sche Formel) $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, A endlich zerlegbar mit $\bar{A} \subset \Omega$. Dann ist für jedes $z_0 \in A$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z$$

Beweis Sei $z_0 \in A$ und $B_{r_0}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r_0\}$. Da A offen ist, existiert $r_0 > 0$ mit $\bar{B}_r(z_0) \subset A$ für alle $r \leq r_0$. Sei $r \leq r_0$,

$$z \mapsto \frac{f(z)}{z - z_0}$$

ist auf $M = A \setminus \overline{B_r(z_0)}$ holomorph. M ist endlich zerlegbar, also folgt aus Cauchy'schen Integralsatz

$$\int_{\partial M} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z = 0$$

wobei $\partial M = \partial A - \partial B_r(z_0)$, somit

$$\int_{\partial A} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

$\partial B_r(z_0)$ lässt sich als $z = \gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$ parametrisieren. Dann ist $\dot{\gamma}(\theta) = ire^{i\theta}$, also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\Big(z_0 + re^{i\theta}\Big)\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

$\forall 0 < r \leq r_0$. Auf der rechten Seite kann nun der Limes $r \to 0$ genommen werden. Da f als differenzierbare Funktion stetig und das Integrationsintervall $[0, 2\pi]$ kompakt ist, kann man den Grenzwert mit dem Integral vertauschen und erhält insgesamt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta f(z_0) = f(z_0)$$

□

Satz 1.22 (Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen) $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$, so gewählt, dass $B_r(z_0) \subset \Omega$. Dann ist

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta f\Big(z_0 + re^{i\theta}\Big)$$

Beweis Sofort aus Cauchy'scher Formel. □

1.3 Potenzreihen und analytische Funktionen

1.3.1 Erinnerung an unendliche Reihen

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, das heißt $a_n \in \mathbb{C}$ für alle N. Für $N \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \quad \text{und} \quad A_N = \sum_{n=0}^{N} |a_n|$$

S_N heißt die N-te Partialsumme der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

A_N ist die N-te Partialsumme der unendlichen Reihe der Absolutbeträge. Die unendliche Reihe ist

- konvergent, wenn die Folge der Partialsummen $(S_N)_{N\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert
- absolut konvergent, wenn die Folge $(A_N)_{N\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert

Die Folge der A_N ist monoton steigend, $A_{N+1} \geq A_N$ für all$ N$, somit konvergent, wenn sie nach oben beschränkt ist. Aus der Dreiecksungleichung $|S_{N+M} - S_n| \leq A_{N+M} - A_N$ und der Vollständigkeit von $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ folgt, dass jede absolut konvergente Reihe auch konvergent ist. Da $a_n = S_n - S_{n-1}$ ist folgt aus der Konvergenz der unendlichen Reihe, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge, somit insbesondere beschränkt ist:

$$\exists K > 0 \forall n \in \mathbb{N}_0 : |a_n| \leq K$$

Konvergente Reihen können gliedweise addiert werden, absolut konvergente Reihen auch beliebig umgeordnet. Beim Umordnen von nicht absolut konvergenten Reihen können beliebige Werte herauskommen.

1.3.2 Die geometrische Reihe

Ein einfaches Beispiel ist die geometrische Reihe. Da sie im folgenden immer wieder verwendet wird, erinnern wir kurz daran: wenn X eine Unbestimmte ist, gilt die Polynomidenität

$$(1-X)\sum_{n=0}^{N} X^n = (1-X)\big(1+X^2+\cdots+X^N\big) = 1-X^{N+1}$$

Sei $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, dann folgt also

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = 1+q+q^2+\cdots+q^N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

Lemma 1.23 Die geometrische Reihe konvergiert für alle $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ absolut, und gibt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Wenn $|q| > 1$ ist, dann divergiert die geometrische Reihe. Für $|q| < 1$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ konvergiert außerdem die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k q^n$$

absolut.

Beweis Für $|q| > 1$ divergiert die Reihe, da die q^n keine Nullfolge bilden. Wenn $|q| < 1$ geht $q^{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} 0$, somit konvergiert die Folge der Partialsummen S_N. Dasselbe gilt für die Partialsummen A_N der Reihe der Absolutbetriäge, das $|q^n| = |q|^n$ ist. Sei $k \in \mathbb{N}$. Es ist

$$\left|n^k q^n\right| = e^{k\ln n - n\ln\frac{1}{|q|}}$$

und $\ln\frac{1}{|q|} > 0$. Da $\frac{\ln n}{n} \to 0$ für $n \to \infty$, dominiert für große n der zweite Term im Exponenten, also gibt es ein $n_0(k,|q|)$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$n\ln\frac{1}{|q|} - k\ln n \geq \frac{n}{2}\ln\frac{1}{|q|}$$

Für $n \geq n_0$ ist also

$$\left|n^k q^n\right| \leq |q|^{n/2}$$

somit hat die Reihe

$$\sum_{n\geq n_0}\left|n^k q^n\right|$$

die Majorante

$$\sum_{n\geq n_0}|q|^{n/2}$$

die für jedes $|q| < 1$ konvergiert. $\square$

1.3.3 Potenzreihen

Sei z zunächst eine formale Variable. Der Ausdurck

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

heißt formale Potenzreihe. Er ist zunächst nur eine mnemotechnische Notation - eine formale Potenzreihe ist einfach gegeben durch die Koeffizientefolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Addition zweier solcher Folgen ist gliedweise definiert, das Produkt hat die Folgenglieder

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

Die formalen Potenzreihen bilden einen Ring. Es gibt eine natürliche Topologie auf dem formalen Potenzreihenring.

Lemma 1.24 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Es gebe ein $z_0 \in \mathbb{C}$, sodass die unendliche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$$

konvergiert. Setze $r_0 = |z_0|$ und $D_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r_0\}$. Dann konvergiert für jedes $z \in D_0$ die unendliche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

absolut. Die Konvergenz ist auf kompakten Teilmengen von D_0, insbesondere für jedes $r < r_0$ auf der Kreisscheibe $\bar{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ gleichmäßig.

Beweis Bezeihne $t_n = a_n z_0^n$. Nach Voraussetzung konergviert die unendliche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n$$

also gibt es $K > 0$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}_0 : |t_n| < K$. Sei $z \in D_0$, dann ist $q = \frac{|z|}{r_0} < 1$, und somit ist die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

konvergent mit Summe $(1-q)^{-1}$. Es folgt

$$\begin{aligned} a_n z^n &= t_n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \\ \implies |a_n z^n| &\leq K q^n \\ \implies \sum_{n=0}^{N} |a_n z^n| &\leq K \sum_{n=0}^{N} q^n \leq K \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \end{aligned}$$

also konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n z^n$$

absolut. Sei $r < r_0$. Für alle $z \in \bar{D}_r$ gilt

$$\left|\frac{z}{r_0}\right| \leq \frac{r}{r_0} = q_r < 1$$

und der Reihenrest erfüllt die Abschätzung

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n\right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n z^n| \leq K \sum_{n=N}^{\infty} q_r^n \leq K \frac{q_r^N}{1-q_r}$$

Da diese Schranke nur von r abhängt, ist die Konvergenz in $\bar{D}_r$ gleichmäßig. Wenn $M \subset D_0$ kompakt ist, gibt es (mit dem üblichen Argument einer endlichen Teilüberdeckung) ein $r < r_0$ mit $M \subset \bar{D}_r$, sodass sich die Gleichmäßgikeit überträgt. □

Lemma 1.25 Vorraussetzungen wie im vorigen Lemma. Dann gilt:

1. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die unendliche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n z^n$$

absolut konvergent, gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von D_0

2. Die dadurch auf D_0 definierte Funktion

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n a^k$$

ist beliebig oft stetig differenzierbar und die Ableitung ist durch gliedweise Differentation gegeben, das heißt durch die konvergente Reihe

$$\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}z^k}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n z^{n-k}$$

3. Die Potenzreihe ist die Tayorreihe der Funktion $f(z)$ um $z = 0$

1. $f(z)$ hat eine Stammfunktion auf D_0, die durch gliedweise Integration erhalten wird:

$$F(z) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

mit $C \in \mathbb{C}$

Beweis Wie vorher folgt $\left|n^k a_n z^n\right| < K n^k q^n$ mit $0 < q < 1$ und die Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k q^n$$

konvergiert für jedes $k \in \mathbb{N}$. Also konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n z^n$$

absolut und gleichmäßig auf Kompakta, im selben Konvergenzkreis. Aufgrund der absoluten Konvergenz ist

$$f(z+h) - f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n((z+h)^n - z^n)$$

Taylorentwicklungmit Rest gibt

$$(z+h)^n - z^n = nz^{n-1}h + n(n-1)h^2 \int_0^1 \mathrm{d}s(1-s)(z+sh)^{n-2}$$

Da wir am Ende den Grenzwert $h \to 0$ nehmen wollen können wir $|h|$ so klein wählen, dass

$$\tilde{q} = \frac{|z| + |h|}{r_0} < 1$$

ist. Für diese h folgt

$$\left|a_n\left((z+h)^n - z^n - nz^{n-1}h\right)\right| \leq \left|a_n r_0^{n-2}\right| n(n-1)|h|^2 \tilde{q}^{n-2} \leq \frac{K}{(\tilde{q}r_0)^2}|h|^2 n^2 \tilde{q}^n$$

Der Restterm gibt also $|h|^2$ mal einer absolut konvergenten Reihe. Da der Differentialquotient durch eine im gleichen Kreis konvergente Potenzreihe gegeben ist, kann dies Prozedur bei jeder Ableitung wiederholt werden. Da jede Ableitung differenzierbar ist, ist sie auch stetig. Wenn man $z = 0$ setzt bekommt man $f^{(k)}(0) = k!a_k$. Die Aussage über die Stammfunktion ergibt sich direkt aus gliedweiser Differentiation. Die absolute Konvergenz der Reihe ist offensichtilch, da $(n+1)^{-1} \leq 1$ ist. □

Definition 1.26 (Konvergenzradius) Der **Konvergenzradius** einer Potenzreihe ist der größte Wert von r, sdass die Reihe für alle z mit $|z| < r$ konvergiert.

1.3.4 Analytische Funktionen

Definition 1.27 Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt analytisch, wenn es zu jedem $z_0 \in \Omega$ ein $r_0 > 0$ gibt, sodass für alle $z \in \Omega$ mit $|z - z_0| < r_0$ gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit $a_n \in \mathbb{C}$ und die Potenzreihe für $|z - z_0| < r_0$ konveriert. In Worten: Eine Funktion ist analytisch, wenn sie sich in Umgebung jedes Punkts ihres Definitonsbereichs durch eine konvergente Taylorreihe darstellen lässt.

1.4 Grundlegende Sätze über holomorphe Funktionen

1.4.1 Holomorphe Funktionen sind analytische

Wir haben gezeigt, dass eine durch eine konvergente Potenzreihe gegebene Funktion beliebig oft stetig komplex differenzierbar ist. Somit gilt: eine auf Ω analytische Funktion f ist auf Ω holomorph. Es gilt aber auch die Umkehrung:

Satz 1.28 Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f auf Ω analytisch. Es gilt nämlich für jedes $z_0 \in \Omega$: wenn $r_0 > 0$ so gewählt ist, dass $B_{r_0}(z_0) \subset \Omega$ ist, dann hat f für alle $z_0 \in B_{r_0}(r_0)$ die Darstellung durch die konvergente Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}w$$

wobei das Integral für jeden Radius r mit der Eigenschaft $0 < r < r_0$ existiert und für diese r unabhängig von r ist. Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $B_{r_0}(z_0)$.

Beweis Sei $z \in B_{r_0}(z_0)$, das heißt $|z-z_0| < r_0$. Es existiert also r_1 mit $|z-z_0| < r_1 r_0$ und es gilt $B_{r_1}(z_0) \subset \Omega$. Nach der Cauchy'schen Formel gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r_1} \frac{f(w)}{w-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r_1} \frac{f(w)}{w-z_0} \frac{1}{1-\zeta}$$

mit

$$\zeta = \frac{z-z_0}{w-z_0}$$

Da

$$|\zeta| = \left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| = \frac{z-z_0}{r_1} < 1$$

ist konvergiert die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n$$

absolut und gleichmäßig in $w \in \partial B_{r_1}(z_0)$. Integral und Reihe lassen sich also vertauschen und wir erhalten die konvergente Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}w$$

Daraus folgt also die Analytizität von f bei z_0, wobei aber $r = r_1$ ist. Andererseits ist aber die Funktion

$$w \mapsto \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$$

holomorph auf $B_{r_0}(z_0) \setminus \{z_0\}$, als kann der Radius des Kreises mit dem Deformationsargument beliebig in $(0, r_0)$ gewählt werden. □

Für jede analytische Funktion sind die Entwicklungskoeffizienten auch die Taylorkoeffizienten, das heißt bei Entwicklung um z_0 gilt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Man erhält also eine Integraldarstellung für die Ableitungen von f bei z_0:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r_0} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}w$$

Durch einfache Abschätzungen des Integranden erhält man

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|w-z_0|=r_0} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}w \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left| f\left(z_0 + r_0 e^{i\theta}\right) \right|}{r_0^{n+1}} r_0 \mathrm{d}\theta \\ &\leq \frac{\sup\{|f(w)| \mid w \in \partial B_{r_0}(z_0)\}}{r_0^n} \end{aligned}$$

Es gilt also

Satz 1.29 Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in \Omega$. Für jedes r, für das $B_r(z_0) \subset \Omega$, gilt

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \leq \frac{1}{r^n} \sup\{|f(w)| \mid w \in \partial B_r(z_0)\}$$

Die lässt sich folgendermahen formulieren: der Analyzitätsradius bei enem z_0 im Holomorphiegebiet Ω der Funktion f ist mindestens so groß wie der Radius der größten offenen Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0, die noch in Ω hineinpasst. Der Konvergenzradius kann größer als ρ_0 sei, nämlich wenn man Rand des Kreises gar keine Singularitäten von f sind.Wenn es eine Singularität irgendwo am Rand gibt, ist der Konvergenzradius natürlich gleich ρ_0. Der Konvergenzradius der Entwicklung um z_0 ist also gerade gleich dem Abstand zu der Singularität, die am nächsten zu z_0 liegt.

Beispiel 1.30 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, mit der Reihenentwicklung um $x = 0$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Die Reihe besitzt Konvergenzradius $\rho = 1$. Da die Funktion ein Maximum bei $x = 0$ hat, auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist und für $x \to \pm\infty$ gegen 0 abfällt, kann man sich fragen, warum der Konvergenzradius „nur" 1 ist. Den Grund dafür sehen wir jetzt im Komplexen. Die Funktion

$$z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$$

ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$. Der Einheitskreis $\{z \mid |z| < 1\}$ liegt vollständig in $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$. Somit gilt $\rho \geq 1$. Die beiden Pole $-i, i$, an denen die Reihenentwicklung nicht konvergieren kann, haben Betrag 1. Also muss $\rho = 1$ sein.

Damit folgt auch das zunächst selbstverständlich klindende

Korollar 1.31 Jede konvergente Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

definert eine auf ihrem Konvergenzkreis analytische Funktion $f(z)$.

Beweis Zu zeigen ist hier, dass nicht nur die Potenzreihe um $z = 0$, sondern auch die Taylorreihe um jedes z_0 im Konvergenzkreis einen positiven Radius hat. Da f holomorph ist folgt dies unmittelbar aus dem Satz, dass holomorphe Funktionen analytisch sind. □

1.4.2 Der Satz von Liouville

Definition 1.32 Eine Funktion f heißt ganz analytisch oder einfach „ganz", wenn $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

Ein Beispiel für eine ganze Funktion ist die Exponentialfunktion.

Satz 1.33 (Satz von Liouville) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz. Wenn f beschränkt ist, ist f konstant.

Beweis Sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Die Reihenentwicklung von f um $z_0 = 0$. Diese Reihe konvergiert für alle z, da jeder Kreis in $\mathbb{C}$ hineinpasst. Da

$$M = \|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| \mid z \in \mathbb{C}\}$$

nach Vorraussetzung endlich gilt

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$$

für alle $r > 0$. Daraus folgt mit $r \to \infty$, dass $a_n = 0$ für alle $n \geq 1$. Daher ist $f(z) = a_0 \forall z \in \mathbb{C}$. □

Satz 1.34 (Fundamentalsatz der Algebra) Sei P ein nicht konstantes Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Dann hat P eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis Da P nicht konstant ist, gibt es ein $n \geq 1$, sodass

$$\begin{aligned} P(z) &= p_0 + p_1 z + \cdots + p_n z^n \\ &= z^n \left(p_n + p_{n-1} z^{-1} + \cdots + p_0 z^{-n}\right) \\ &=: z^n \pi(z) \end{aligned}$$

wobei $p_n \neq 0$ ist. Wenn $|z| \geq R$ ist, gilt

$$|\pi(z) - p_n| \leq |p_{n-1}| R^{-1} + |p_{n-2}| R^{-2} + \cdots + |p_0| R^{-n}$$

Es gibt also ein $R_0 > 0$, sodass für $|z| \geq R_0$ gilt

$$|\pi(z)| \geq \frac{p_n}{2}$$

und somit ist $z \mapsto P(z)^{-1}$ auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R_0\}$ holomorph und beschränkt:

$$|P(z)|^{-1} \leq \frac{2}{|p_n|} R_0^{-n}$$

Wenn P keine Nullstellen hätte dann auch keine auf der kompakten Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R_0 + 1\}$. Dann wäre P^{-1} dort stetig und somit beschränkt und in der offenen k reisseihcbe holomorph. Also wäre P^{-1} als beschränkte ganze Funktion konstant, im Widerspruch zur Annahme $p_n \neq 0$. $\square$

1.4.3 Satz von Morera

Der Satz von Morera ist die Umkehrung des des Satzes von Cauchy. Er besagt, dass eine stetige Funktion deren komplexes Linienintegral über Dreiecksränder verschwindet holomorph ist.

Satz 1.35 (Satz von Morera) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Für jedes abgeschlossene Dreieck $\triangle \subset \Omega$ gelte

$$\int_{\triangle} f(z) \mathrm{d}z = 0$$

Dann ist f auf Ω holomorph.

Beweis Da Ω um jeden Punkt einer Kreisscheibe enthält und Differenziebarkeit eine lokale Eigenschaft ist, genügt es, sich auf dies Kreisscheibe zu beschränken, das heißt ohne Einschränkung sei $\Omega = B_r(0)$. Für $z \in \Omega$ sei $\gamma_z : [0,1] \to \Omega, t \to tz$ und

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w) \mathrm{d}w$$

Dann ist

$$\begin{aligned} F(z) - F(z_0) &= \int_{[\gamma_z]} f(w) \mathrm{d}w - \int_{[\gamma_{z_0}]} f(w) \mathrm{d}w \\ &= -\int_{[\gamma_{z_0}] - [\gamma_z]} f(w) \mathrm{d}w = \mp \int_{\partial \triangle} f(w) \mathrm{d}w + \int_{[\eta]} f(w) \mathrm{d}w \end{aligned}$$

wobei $\triangle$ das von $0, z_0$ und z gebildete Dreieck ist, und $\eta : [0,1] \to \Omega$ als

$$s \mapsto (1-s) \cdot z_0 + s \cdot z = z_0 + s(z - z_0)$$

die fehlende Seite des Dreiecks ist. Das Vorzeichen vor dem Integral über $\partial\triangle$ hängt davon ab, wie z und z_0 relativ zueinander liegen, da dies bestimmt, was der positive Orientierungssinn von $\partial\triangle$ ist. Es ist aber irrelevant, da nach Vorraussetzung dieses Integral verschwindet. Wir berechnen das Integral über $[\eta]$ in der gegebenen Parametrisierung, für die $\dot{\phi}(s) = z - z_0$ ist, somit

$$\int_{[\eta]} f(w)\mathrm{d}w = \int_0^1 \mathrm{d}s f(\eta(s))\dot{\eta}(s) = (z - z_0)\int_0^1 \mathrm{d}s f(z_0 + s(z - z_0))$$

Somit wird

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = f(z_0) + \int_0^1 \mathrm{d}s(f(z_0 + s \cdot (z - z_0)) - f(z_0))$$

Da f stetig ist konvergiert der Integrand im letzten Integral gegen Null. Da die Menge $\{z_0 + s \cdot (z - z_0) \mid s \in [-1, 1]\}$ kompakt ist, diese Konvergenz gleichmäßig. Also konvergiert auch das Integral im Limes $z \to z_0$ gegen Null, und wir erhalten

$$\lim_{z\to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = f(z_0)$$

Also ist F komplex differenzierbar, mit Ableitung f. Da f stetig ist, folgt, dass F holomorph ist, also analytisch, das heißt beliebig oft komplex differenzierbar. Somit ist auch f analytisch auf Ω. □

Satz 1.36 (Schwarz'sches Spiegelungsprinzip) Sei Ω Durchschnitt einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ mit der abgeschlossenen oberen Halbebene $\bar{\mathbb{H}} = \{z \mid \Im z \geq 0\}$, und es gelte $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die auf $\mathring{\Omega}$ holomorph ist und auf $\Omega \cap \mathbb{R}$ nur reelle Werte annimmt. Dann gilt

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \Omega \\ \overline{f(\bar{z})} & z \in \Omega^* = \{\bar{z} \mid z \in \Omega\} \end{cases}$$

ist wohldefiniert auf $\Omega \cup \Omega^*$ holomorph.

Beweis Man muss zunächst zeigen, dass die Funktion wohldefiniert ist, da man für $z \in \Omega \cap \Omega^* \subset \mathbb{R}$ zwei Definitionen hat. Diese z sind aber reell, $\bar{z} = z$ und nach Vorraussetzung gilt dann $\overline{f(z)} = f(z)$, also auch $\overline{f(\bar{z})} = f(z)$. Deshaltb ist $\tilde{f}$ wohldefinert. $\tilde{f}$ ist stetig. Es bleibt zu zeigen, dass $\tilde{f}$ holomorph ist, insbesondere, dass die Funktion keinen „Knick" hat, wenn man über die reelle Achse geht. Klarerweise ist $\tilde{f}$ auf $\mathring{\Omega} = \Omega \cap \mathbb{H}$ holomorph, da $\tilde{f}$ dort mit der als holomorph angenommenen Funktion f übereinstimmt. Wir zeigen zunächst, dass f auch auf der an der reellen Achse gespiegelten Menge $\mathring{\Omega}^* = (\Omega \cap \mathbb{H})^* = \{\bar{z} \mid z \in \Omega \cap \mathbb{H}\}$ holomorph ist. Sei $z \in \mathring{\Omega}^*$. Dann ist $\bar{z}$ in $\mathring{\Omega}^*$, und somit gibt es ein $r > 0$ und eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahler, sodass für $\omega \in B_r(\bar{z})$ die Reihe

$$f(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\omega - \bar{z})^n$$

konvergiert. Dann gilt für alle $w \in B_r(z) : \bar{w} \in B_r(\bar{z})$, also

$$\tilde{f}(w) = \overline{f(\bar{w})} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\bar{w} - \bar{z})^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n(w - z)^n$$

wobei das Vertauschen der Komplexkonjugation mit der Reihensummation aufgrund der absoluten Konvergenz erlaubt ist. Da die Reihe für $|w - z| < r$ konvergiert, ist $\tilde{f}$ analytisch in z. Um zu zeigen, dass die Holomorphie auch in Umgebung der reellen Achse gilt verwenden wir den Satz von Morera. Wenn Das Dreieick $\triangle$ mit $\mathbb{R}$ disjunkt ist, folgt aus der eben gezeigten Holomorphie, dass das Konturintegral gleich Null ist. Ansonsten schneidet man aus $\triangle$ einen Streifen $\{z \mid |\Im z| < \varepsilon\}$ heraus. Die Differenz zum Integral über das ursprüngliche Dreieck besteht aus zwei Integralen über Wege der Länge $O(\varepsilon)$, die die reelle Achse kreuzen, und Integralen über die horizontalen Teilstücke mit $\Im z = \pm\varepsilon$. Da f stetig ist, ist es auf diese kompakten Mengen beschränkt und somit gehen diese Beiträge für $\varepsilon \to 0$ linear in ε gegen Null. Die Integrale über die beiden horizontalen Teilstücke haben sich im Limes $\varepsilon \to 0$ auf, da $\tilde{f}$ stetig ist und die beiden Wege im Limes gleich werden, bis auf die entgegengesetzte Orientierung. □

1.4.4 Der Identitätssatz

Definition 1.37 (Gebiet) $G \subset \mathbb{C}$ ist ein Gebiet $:\iff$ G ist offen und zusammenhängend

Satz 1.38 (Identitätssatz) $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ und $g : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

1. $f = g$, das heißt $\forall z \in G : f(z) = g(z)$
2. $\{w \in G : f(w) = g(w)\}$ hat einen Häufungspunkt
3. $\exists z_0 \in G : f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(k_0) \forall k \in \mathbb{N}_0$

Beweis 1. $\implies$ 2. (jeder Punkt einer offenen Menge ist Häufungspunkt dieser Menge)

2. $\implies$ 3. $h := f - g$ ist holomorph auf G.

$$N = \{w \in G : h(w) = 0\}$$

hat Häufungspunkt $\alpha \in G$. Annahme

$$\exists l \in \mathbb{N}_0 : \forall k < l h^{(k)}(\alpha) = 0 \quad \text{aber} \quad h^{(l)}(\alpha) \neq 0$$
$$\implies h(z) = (z - \alpha)^l \underbrace{\sum_{n=l}^{\infty} \frac{h^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^{n-l}}_{\varphi(z)}$$

$z \mapsto \varphi(z)$ ist analytisch

$$\varphi(\alpha) = \frac{h^{(l)}(\alpha)}{l!} \neq 0$$

φ ist stetig

$$\implies \exists \rho > 0 \forall z : |z - \alpha| < \rho : g(z) \neq 0$$

$\implies$ α ist l-fache Nullstelle, also kein Häufungspunkt von Nullstellen `.

3. $\implies$ 1. $h = f - g$

$$N_k = \{w \in G : h^{(k)}(w) = 0\} \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$

(φ stetig $\implies$ $\mathcal{N}_\varphi = \{x : \varphi(x) = 0\}$ ist abgeschlossen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{N}_\varphi$, das heißt $\varphi(x_n) = 0 \forall n$. $x_n \to x \implies \varphi(x_n) \xrightarrow{x \to \infty} \varphi(x)$ da φ stetig $\implies x \in \mathcal{N}_\varphi$)

$$N = \bigcap_{k=0}^{\infty} N_k$$

ist abgeschlossen. Ist $z_0 \in N_k \forall k \implies z_0 \in N, N \neq \emptyset$
Behauptung N ist offen in G. Sei $w \in N$, das heißt $\forall k \in \mathbb{N}_0 : h^{(k)}(w) = 0$. $w \in G \implies$ die Reihe

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(w)}{k!} (z - w)^k$$

hat positiven Konvergenzradius $\rho > 0$. alle Koeffizienten \$ = 0\$

$$\implies \forall z \in B_\rho(w) : h(z) = 0 \implies \forall k \in \mathbb{N}_0 h^{(k)}(z) = 0$$

$\implies B_\rho(w) \subset N$, N ist offen. Da G zusammenhängend ist, folgt $N = G$, das heißt $f = g$. □

Satz 1.39 (Maximumsprinzip) G Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. $\exists z_0 \in G : |f|$ hat bei z_0 ein lokales Maximum. $\implies f$ it konstant.

Beweis $\exists r_0 > 0 : B_{r_0}(z_0) \subset G$ und

$$f(z_0) \geq f(z) \forall z \in B_{r_0}(z_0)$$

$$M := |f(z_0)| \underset{\downarrow}{=} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta \right|$$

Mittelwerteigenschaft da f holomorph

$$\_eq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\left| f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) \right|}_{\leq M} \mathrm{d}\theta \leq M$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(M - \left| f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) \right| \right)}_{\geq 0, \text{ stetig}} \mathrm{d}\theta = 0$$

$$\implies M - \left| f\left(z + re^{i\theta}\right) \right| = 0 \forall \theta, r < r_0$$

$|f|$ ist konstant auf $B_{r_0}(z_0)$. □

Lemma 1.40 f holomorph und $|f|$ konstant $\implies f = \text{const.}$

Satz 1.41 Sei G ein beschränktes Gebiet. f sei auf $\bar{G}$ stetig und auf G holomorph. Dann nimmt $|f|$ sein Maximum am Rand von G an:

$$\forall z \in \bar{G} : |f(z)| \leq \max\{|f(w)| w \in \partial G|\}$$

Beweis Wenn f konstant ist, dann ist jedes $z \in \bar{G}$ ein lokales Maximum von $|f|$ andernfalls kein lokales Maximum in G. $\bar{G}$ kompakt, $|f|$ stetig $\implies |f|$ nimmt auf $\bar{G}$ sein Maximum an, $\bar{G} \setminus G = \partial G$ □

Satz 1.42 (Minimumprinzip) G Gebiet, f holomorph auf G. $\exists z_0 \in G$: $|f|$ hat bei z_0 ein lokales Minimum $\implies f(z_0) = 0$ oder f ist konstant auf G

1.5 Konvergenz holomorpher Funktionen

Eine natürlich Weise holomorphe Funktionen zu konstruieren, ist als Grenzfunktion von Folgen (speziell: unendliche Reihen) holomorpher Funktionen. Die Darstellung als Potenzreihe ist ein spezieller Fall davon - die Funktion wird als unendliche Reihe einfacher Polynome dargestellt.

1.5.1 Erinnerung an elementare Konvergenzbegriffe

X metrischer Raum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, f_n : X \to \mathbb{C}$.
$f_n \to f$ punktweise

$$:\iff \forall \varepsilon > 0 \forall x \in X \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$f_n \to f$ gleichmäßig auf X

$$:\iff \forall \varepsilon_0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall x \in X \forall n \geq N_0 |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Lemma 1.43 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge stetiger Funktionen, gleichmäßig konvergent gegen $f \implies f$ ist stetig.

1.5.2 Einfache Beispiele

Beispiel 1.44

$$f_n(x) = \tanh(nx)$$
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad \text{unstetig}$$
$$\varphi_n(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}}$$
$$\varphi_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} |t|$$
$$0 \leq \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{t^2} = \frac{t^2 + \frac{1}{n} - t^2}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} + t^2}$$
$$= \frac{1}{n} \frac{1}{sqrtt^2 + \frac{1}{n} + t^2} \leq \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\implies$ gleichmäßig konvergent.

1.5.3 Der Weierstrass'sche Konvergenzsatz

Satz 1.45 (Konvergenzsatz von Weierstrass) $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ Folge holomorpher Funktionen. Wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf kompakten Teilmengen von Ω gleichmäßig konvergiert, dann ist die Grenzfunktion

$$z \mapsto f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$$

ebenfalls holomorph auf Ω und es gibt $\forall k \in \mathbb{N}_0$:

$$f_n^{(k)}(z) \xrightarrow{n\to\infty} f^{(k)}(z)$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω.

Beweis $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, f_n : \Omega \to \mathbb{C}$. $f_n \to f$ gleichmäßig $\implies$ f stetig auf Ω. $\implies$ für jedes Dreieck $\Delta \subset \Omega$ existiert das Linienintegral von f über $\partial\Delta$. f_n holomorph für alle n

$$\implies \int_{\partial\Delta} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\partial\Delta} (f(z) - f_n(z))$$

Sei L die Länge von $\partial\Delta$ ($L < \infty$, da $\partial\Delta$ kompakt). f_n konvergiert gleichmäßig auf $\partial\nabla$ gegen f. Sei $\varepsilon > 0 \implies$ $\exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_0 \forall z \in \partial\nabla$

$$|f_N(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{L}$$

$n = N_0$:

$$\left|\int_{\partial\Delta} (f(z) - f_n(z))\mathrm{d}z\right| \leq L \sup_{z\in\partial\Delta} |f_n(z) - f(z)| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$
$$\forall\varepsilon > 0 : \left|\int_{\partial\Delta} f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \varepsilon$$
$$\implies \int_{\partial\Delta} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

Satz von Moerra $\implies f$ holomorph. Sei $K \subset G$ kompakt

$$\exists \rho > 0 : \infty = \{w \in \mathbb{C} : \exists z \in K : |w - z| < 2\rho\} \subset G$$

$\tilde{K} = \{w \in \mathbb{C} : \exists z \in K : |w - z| \leq \rho\} \implies \tilde{K}$ ist kompakt. Nach Vorraussetzung konvergiert f_n gleichmäßig gegen f auf $\tilde{K}$

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z) &= \frac{k!}{2\pi i} \int \frac{f(w) - f_n(w)}{(w-z)^{k+1}} \mathrm{d}w \\ \left| f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z) \right| &\leq \frac{k!}{\rho^k} \sup\{|f_n(w) - f(w)| \mid |w - z| = \rho\} \\ &\leq \frac{k!}{\rho^k} \sup_{w \in \tilde{K}} \underbrace{|f_n(w) - f(w)|}_{\text{unabhängig von } z, \xrightarrow{n \to \infty} 0} \end{aligned}$$

□

1.6 Residuensatz und Residuenkalkül

Isolierte Singulatritäten und Laurentreihen

Definition 1.46 (Singulatritäten) $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann nennt man z_0 eine isolierte Singularität von f.

1. z_0 heißt habbare Singularität, wenn durch geeignete Definition von $f(z_0)$ die Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ definiert werden kann und holomorph ist.
2. z_0 heißt Pol m-ter Ordnung ($m \in \mathbb{N}$), wenn z_0 nicht hebbar ist, aber $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ bei z_0 eine hebbare Singularität hat. (kleinst mögliches m)
3. ansonsten heißt z_0 wesentliche Singularität von f.

Definition 1.47 (meromorph) Wenn f bis auf eine diskrete Menge ($\exists r > 0 \forall z, z' \in S : z \neq z' \implies |z - z'| < r$) S von Polen holomorph ist, nennt man f **meromorph**.

Wenn $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph sind und $g \neq 0$ (das heißt $\exists z \in U : g(z) \neq 0$) dann ist f/g meromorph auf U. Aus dem Identitätssatz folgt, dass eine holomorphe Funktion $g \neq 0$ keine Häufungspunkte von Nullstellen haben kann

$$S = \{w \in U \mid g(w) = 0\}$$

ist diskret. $f/g : U \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph. Identitätssatz: alle Nullstellen von g sind endlicher Ordnung, das heißt

$$z \in S : g(w) = (w - z)^l h(w) \qquad l \in \mathbb{N}, h(z) \neq 0$$

Spezialfall f, g Polynome, f/g rationale Funktion. wesentliche Singularität: $z = 0$ für $z \mapsto e^{1/z}$

Definition 1.48 $0 \leq \rho_1 < \rho_2 : \mathcal{K}_{\rho_1,\rho_2}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$. $\rho_1 = 0$: „Punktierte Kreisscheibe“ $\mathcal{K}_{0,p}(z_0) = B_\rho(z_0) \setminus \{z_0\}$.

Satz 1.49 (Laurentreihe) $f : \mathcal{K}_{\rho_1,\rho_2}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Für $r \in (\rho_1, \rho_2)$ ist

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \mathrm{d}w$$

unabhängig von $r \forall n \in \mathbb{Z}$, und die Laurentreihe von f

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

konvergiert in $\mathcal{K}_{\rho_1,\rho_2}(0)$ absolut und kompakt und

$$f(k) = \sum_{n-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

Der **Hauptteil** der Laurentreihe

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n = \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots$$

konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \rho_1$. Der **Nebenteil** der Laurentreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

konvergiert für alle z mit $|z| < \rho_2$.

Beweis Wähle r_1 und r_2 so, dass $\rho_1 < r_1 < r_2 < \rho_2$. $R = \mathcal{K}_{r_1,r_2}(0)$. R ist einfach zerlegbar. $\partial R = \partial B_{r_2}(0) - \partial B_{r_1}(0)$. $\bar{R}$ ist Teilmenge des Holomorphiegebiets von f. Cauchy'sche Integralformel $\implies$ für $z \in R$ ist

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_2} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i} \int_{|v|=r_1} \frac{f(v)}{v-z} \mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_2} \frac{\mathrm{d}w}{w} \frac{f(w)}{1-\frac{z}{w}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|v|=r_1} \frac{\mathrm{d}v}{z} \frac{f(v)}{1-\frac{v}{z}}
\end{aligned}$$

$|z| < r_2 \implies |z/w| < 1, |(|z) > r_1 \implies |v/z| < 1 \implies$ Entwicklung durch geometrische Reihe

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_2} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \mathrm{d}w}_{=c_n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{|v|=r_1} v^n f(v) \mathrm{d}v \\
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{k=-\infty}^{-1} z^k \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(v)}{v^{k+1}} \mathrm{d}v}_{=c_k} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \\
&= H(z) + N(z)
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 1.50 (Hebbarkeitssatz von Riemann) $f : \dot{B}_\rho(0) \to \mathbb{C}$. Es gebe $M > 0$

$$\forall z \in \dot{B}_\rho(0) : |f(z)| < M$$

Dann existiert der Grenzwert

$$c_0 := \lim_{z \to 0} f(z)$$

und die (eindeutig bestimmte) stetige Fortsetzung von f auf $B_\rho(0)$ (gegeben durch $f(0) := c_0$) ist holomorph.

Beweis $n \geq 1, 1 < r < \rho$.

$$\begin{aligned}
c_{-n} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r} f(w)w^{n-1}\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int f\left(re^{i\theta}\right)e^{i(n-1)\theta}r^{n-1}ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta \\
\implies |c_n| &\leq \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq r^n M \xrightarrow{r\to 0} 0 \\
\implies \forall n \geq 1 : c_{-n} = 0
\end{aligned}$$

$\implies$ Hauptteil der Laurentreihe $= 0$.

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad \forall z \in \dot{B}_\rho(0) \\
f(0) &:= c_0
\end{aligned}$$

□

Endlich viele isolierte Singularitäten $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}, z_i \neq z_j \forall i \neq j$. $f : \mathbb{C}\backslash\{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ sei holomorph. $\forall j \in \{1, \ldots, n\} \exists r_j > 0$, sodass die Laurentreihe um z_j auf $\dot{B}_{r_j}(z)$ konvergiert. Die r_j können so klein gewählt werden, dass

$$B_{r_i}(z_i) \cap B_{r_k}(z_k) = \emptyset \forall i \neq k$$

$$\begin{aligned}
L_j(z) &= H_j(z) + N_j(z) \\
H_j(z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n^{(j)}(z-z_j)^n \\
N_j(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(j)}(z-z_j)^n \\
\varphi(z) &= f(z) - \sum_{j=1}^{n} H_j(z)
\end{aligned}$$

$\implies$ $\varphi(z)$ ist ganze Funktion. (auf $\dot{B}_{r_j}(z_j)$ ist

$$f(z) = N_j(z) - \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} H_k(z)$$

holomorph, also auf $\dot{B}_{r_j/2}(z_j)$ beschränkt $\implies$ die Singulatriät z_j von φ ist hebbar)
Wichtiger Spezialfall: rationale Funktionen

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Q nicht identisch Null, P, Q Polynome. $f : \mathbb{C}\backslash\{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ holomorph, wenn $z_1, \ldots, z_n$ die Nullstellen von Q sind.

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{n=1}^{m_j}\frac{c_{-n}^{(j)}}{(z-z_j)^n} + \underset{\text{ganz}}{\underset{\downarrow}{\phi(z)}}$$

Wenn $\deg P < \deg Q$, dann gilt $\phi(z) \xrightarrow{|z|\to\infty} 0$. $\implies$ ϕ ist beschränkt $\xRightarrow{\text{Satz von Liouville}}$ $\phi = \text{const.}$ $\implies$ $\phi = 0$.

Satz 1.51 (Partialbruchzerlegung) Jede rationale Funktion P/Q mit $\deg P < \deg Q$ hat eine die Partialbruchzeilegung

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{n=1}^{m_j} \frac{c_{-n}^{(j)}}{(z - z_j)^n}$$

Ohne die Annahme $\deg P < \deg Q$ folgt ϕ ist ein Polynom.

Definition 1.52 (Residuum) $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$$

Das Residuum von f bei z_0 ist

$$\operatorname{Res}_{z_0} f := \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) := c_{-1}$$

für $r > 0$ klein genug:

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) \mathrm{d}z$$

Satz 1.53 (Residuensatz) $U \subset \mathbb{C}$ offen, S sei eine diskrete Teilmenge von U. Die Funktion f sei auf U bis auf isolierte Singularitäten in S holomorph, das heißt $f : U \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph. Wenn A endlich zerlegbar ist, $\bar{A} \subset U$ und $\partial A \cap S = \emptyset$, dann ist

$$\int_{\partial A} f(z) \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{z \in S \cap A} \operatorname{Res}_z f$$

Beweis Linke Seite ist wohldefiniert, da $S \cap \partial A = \emptyset$, ∂A kompakt $\implies$ Integral über stetige Funktionen auf Kompaktum. Rechte Seite ist wohldefiniert, da $\bar{A}$ kompakt, also $S \cap A$ endlich. $S \cap A = \{z_1, \ldots, z_n\}$.

$$\forall j \exists \rho_j > 0 : \bar{B}_j := \bar{B_{\rho_j}}(z_j) \subset A \quad \text{und} \quad \bar{B}_j \cap S = \{z_j\}$$

(ρ_j so klein, dass die Laurentreihe auf f um z_j konvergiert.)

$$R = A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \bar{B}_j$$

endlich zerlegbar (R ist offen, $\bar{R}$ ist kompakt). $R \subset U \setminus S$ (Holomorphiegebiet von f).

$$\implies \int_{\partial R} f(z) \mathrm{d}z = 0$$

$$\partial R = \partial A - \sum_{j=1}^{n} \partial \bar{B}_j$$

$$\begin{aligned} \implies \int_{\partial A} f(z) \mathrm{d}z &= \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial \bar{B}_j} f(z) \mathrm{d}z \\ &= 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_j}(z) \end{aligned}$$

□

Residuenkalkül: Berechnen von Integralen mit Hilfe des Residuensatzes (Trickkiste) Beispiele:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$$
$$x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 \geq 1 \forall x \in \mathbb{R}$$

$\implies$ kein Pol am Integrationsweg. Weil Integrand $\sim 1/x^2$ für $|x| \to \infty$:

$$b > 0 : \quad \int_b^c \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} \leq \int_b^c \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{b+1}$$

$\implies$ Integral konvergiert und

$$I = \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$$
$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2+1}$$
$$(z+1)^2+1 = 0$$
$$z = -1 \pm i$$

$f : \mathbb{C} \setminus \{-i-i, -i+1\} \to \mathbb{C}$ holomorph. γ_L : Halbkreis mit Radius L um Null, ι_L: Intervall $[-L, L]$

$$\int_{\gamma_L+\iota_L} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}_{-i+1} f$$
$$\int_{\iota_L} f(z)\mathrm{d}z \xrightarrow{L\to\infty} I$$

Behauptung:

$$\int_{\gamma_L} f(z)\mathrm{d}z \xrightarrow{L\to\infty} 0$$
$$\implies I = 2\pi i \operatorname{Res}_{-1+i} f$$

γ_L parametrisiert durch $z(\theta) = Le^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_0^\infty \mathrm{d}\theta f\left(Le^{i\theta}\right)iLe^{i\theta}$$

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leq L\int_0^\pi \left|f\left(Le^{i\theta}\right)\right|\mathrm{d}\theta \leq L\pi \sup_{0\leq\theta\leq\pi}\left|f\left(Le^{i\theta}\right)\right|$$

$$\left|\left(Le^{i\theta}+1\right)^2+1\right| \geq L^2u \quad u>0, L>10(\text{ was?})$$

$$\implies \sup_{0\leq\theta\leq\infty}\left|f\left(Le^{i\theta}\right)\right| \leq \frac{1}{u}\frac{1}{L^2}$$

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \frac{\pi}{u}\frac{L}{L^2} = \frac{\pi}{uL} \xrightarrow{L\to\infty} 0$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+1-i)(z+1+i)} = \frac{1}{(z-z_+)(z-z_-)} \qquad z_\pm = -1\pm i$$

$$= \frac{1}{(z-z_+)(z_i-z_-+z-z_+)} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-z_+}\sum_{k=0}^\infty \frac{(z-z_+)^k}{(2i)^k}$$

$$\operatorname{Res}_{-1+i} f = \frac{1}{2i}$$

$$I = 2\pi i\frac{1}{2i} = \pi$$

Beispiel 2:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega t}}{\omega-\Omega+i\Gamma}\mathrm{d}\omega \qquad t,\Omega,\Gamma\in\mathbb{R}$$

Betrachte

$$w \mapsto \frac{1}{\omega-\Omega-i\Gamma} = \frac{1}{\omega-\omega_0} \qquad \omega_0 = \Omega - i\Gamma$$

Pol bei ω_0: wollen, dass $\omega_0 \notin \mathbb{R}$, das heißt $\Gamma\neq 0$. $\omega\in\mathbb{R}$

$$\left|\frac{1}{\omega-\Omega\xi i\Gamma}\right| = \frac{1}{\sqrt{(\omega-\Omega)^2+\Gamma^2}} = \begin{cases}\frac{1}{|\omega-\Omega|} & \Gamma = 0\\ \frac{1}{|\Gamma|} & \Gamma\neq 0\end{cases}$$

wenn $|\omega|\to\infty$, ist

$$\frac{1}{\omega-\Omega-i\Gamma} \sim \frac{1}{\omega}$$

Betrachte also das Integral

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} = \infty$$

$$\int_0^b \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} = \ln b \xrightarrow{b\to\infty} \infty$$

ist also nicht konvergent, das heißt der Integrand ist nicht im L^1 (auch für $\Gamma\neq 0$). Definiere

$$J_{ab} = \int_a^b \frac{e^{i\omega t}}{\omega-\Omega-i\Gamma}\mathrm{d}\omega$$

und

$$J = \lim_{a\to\infty}\lim_{b\to\infty} J_{ab}$$

$t = 0$:
$$\int_{-2|\omega_0|}^{2|\omega_0|} \frac{1}{\omega - \omega_0} \mathrm{d}\omega$$
ist endlich ($\omega_0 \notin \mathbb{R}$, da $\Gamma \neq 0$). $b > 2|\omega_0|$:
$$\begin{aligned}\int_{2|\omega_0|}^{b} \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega - \omega_0} &= \int_{2|\omega_0|}^{b} \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}\left(\frac{1}{1-\frac{\omega_0}{\omega}} - 1 + 1\right) \\ &= \int_{2|\omega_0|}^{b} \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} + \omega_0 \int_{2|\omega_0|}^{b} \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega(\omega-\omega_0)} \qquad = \ln\frac{b}{2|\omega_0|} + \mathcal{O}1\end{aligned}$$
Nun betrachte
$$\int_{a}^{-2|\omega_0|} \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega - \omega_0} = \ln\frac{2|\omega_0|}{|a|} + \mathcal{O}(1)$$

$b = 0$:
$$J_{ab} - \ln\frac{b}{|a|} = \mathcal{O}(1)$$
Fazit: für $t = 0$ existiert J nicht(nur der „Hauptwert“ $\lim_{b\to\infty} J_{-b,b}$). Behauptung: $\forall t \neq 0, \Gamma \neq 0$ existiert der Limes für J. Heilmittel: partielle Integration
$$\begin{aligned} e^{i\omega t} &= \frac{1}{it}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}e^{i\omega t} \\ \implies J_{ab} &= \frac{1}{it}\int_a^b \frac{1}{\omega-\omega_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}e^{i\omega t} \\ &= \underbrace{\frac{1}{it}\frac{e^{i\omega t}}{\omega-\omega_0}\Bigg|_a^b}_{\xrightarrow{a,b\to\infty} 0} - \underbrace{\frac{1}{it}\int_a^b e^{i\omega t}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2}\mathrm{d}\omega}_{\sim 1/\omega^2 \implies \text{absolut konvergent}} \\ &= \lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \Omega - i\Gamma} \end{aligned} \qquad (t \neq 0)$$

$\omega = u + iv$:
$$t > 0 : e^{i\omega t} = e^{i\omega t}e^{-vt}$$
$v > 0$ „oben schließen“
$$t < 0 : e^{i\omega t} = e^{i\omega t}e^{v|t|}$$
$\implies$ $v < 0$ „unten schließen“ betrachte also wieder einen Halbkreis, γ_L^+ sei der positive ($v > 0$) und γ_L^- endsprechend der negative ($v < 0$), mit vorheriger Notation für $t > 0$:

ω_j Pol von $\left(\omega - \omega^0\right)^{-1}$ im Inneren von $\iota_L + \gamma_L^{(+)}$
$$\begin{aligned}\int_{\iota_L+\gamma_L^+} \frac{e^{i\omega t}}{\omega-\omega_0}\mathrm{d}\omega &= 2\pi i \sum_{\omega_j \text{ Pol}} \operatorname{Res}_{\omega_j} \frac{1}{\omega-\omega_0} \\ &= \begin{cases} 0 & \Im\omega_0 = \Gamma < 0 \\ 2\pi i \operatorname{Res}_{\omega+i\Gamma} \frac{i\omega t}{\omega-\omega_0} & \Gamma > 0 \end{cases} \\ &= 2\pi i e^{i\omega_0 t} = 2\pi i e^{i\Omega t}e^{-\Gamma t}\end{aligned}$$

für $t < 0$ erhält man

$$\int_{\iota_L+\gamma_L^-} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \omega_0} \mathrm{d}\omega = -2\pi i \begin{cases} 0 & \Gamma > 0 \\ e^{i\Omega t} e^{-i\Gamma t} & \Gamma < 0 \end{cases}$$

Warum verschwindet der Beitrag von $\gamma_L^{(+)}$, wenn das Vorzeichen von t „stimmt"?

Lemma 1.54 (Lemma von Jordan) Q sei meromorph in $\bar{\mathbb{H}}$ und habe höchstens endlich viele Pole, die alle in $\mathbb{H}$ liegen

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$$
$$\bar{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z \geq 0\}$$

Es gelte

$$\lim_{|z|\to\infty} Q(z) = 0$$

in $\mathbb{H}$ gleichmäßig in $\varphi = \arg z$.

$$\Gamma_\rho : [0, \pi] \to \mathbb{C}, \varphi \mapsto \rho e^{i\varphi}$$

Es sei $m > 0$. Dann gilt

$$I = \lim_{\rho\to\infty} I_\rho = 0$$
$$\text{wobei } I_\rho = \int_{\Gamma_\rho} Q(z) e^{imz} \mathrm{d}z$$

Beweis Nach Vorraussetzung $\exists \rho_0 > 0$, sodass Q auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{\rho_0}{2}\}$ holomorph ist. $\to I_\rho$ existiert für alle $\rho \geq \rho_0$

$$\lim_{\rho\to\infty} Q\left(\rho e^{i\theta}\right) = 0$$

gleichmäßig in $\theta \in [0, \pi]$

$$z(\theta) = \rho e^{i\theta} e^{imz(\theta)} = e^{im\rho\cos\theta} e^{-m\rho\sin\theta}$$

$0 \in [0, 1] \implies \sin\theta \geq 0$.

$$I_\rho = i\rho \int_0^\pi Q\left(\rho e^{i\theta}\right) e^{i(\theta + m\rho\cos\theta)} e^{-m\rho\sin\theta} \mathrm{d}\theta$$
$$|I_\rho| \leq \rho \int_0^\pi \left|Q\left(\rho e^{i\theta}\right)\right| e^{-m\rho\sin\theta} \mathrm{d}\theta$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \rho_1 > \rho_0 \forall \rho \geq \rho_1 \forall \theta \in [0, \pi] : \left|Q\left(\rho e^{i\theta}\right)\right| < \varepsilon$

$$\implies \forall \rho > \rho_1 : |I_\rho| < \varepsilon\rho \int_0^\infty e^{-m\rho\sin\theta} \mathrm{d}\theta$$

$\forall \theta \in [0, \pi/2] : \sin\theta \leq \theta 2/\pi$

$$|I_\rho| < 2\varepsilon\rho \int_0^{\pi/2} e^{-m\rho\frac{2}{\pi}\theta} \mathrm{d}\theta = 2\varepsilon\rho \frac{\pi}{2m\rho} e^{-m\rho\frac{2}{\pi}\theta}\Big|_{\pi/2}^0 \leq \frac{\pi}{m}\varepsilon \qquad \square$$