Übungsblatt 2

Abgabetermin: 04.05.2017, 9:20 Uhr.

Auf dem gesamten Übungsblatt bezeichne K einen Körper.

Aufgabe 1 *(2+2 = 4 Punkte)*

Seien $f : V \to W, g : W \to V$ lineare Abbildungen zwischen K-Vektorräumen.

a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte ungleich 0 von $f \circ g$ und von $g \circ f$ übereinstimmen.

b) Zeigen Sie mit einem Gegenbeispiel, dass in Teil a) auf die Einschränkung „ungleich 0“ im Allgemeinen nicht verzichtet werden kann.

Aufgabe 2 *(3+2+1 = 6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Tupel $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ so dass die Abbildung f_A (definiert wie auf Blatt 1, Aufgabe 1.a, jedoch für $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$) diagonalisierbar ist.

b) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und sei $f : V \to V$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus. Es gelte: Zu je zwei Eigenvektoren $v, w \in V$ mit $v \neq -w$ ist auch $v + w$ ein Eigenvektor. Folgern Sie: $f = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$ für ein geeignetes $\lambda \in K$.

c) Zeigen Sie mit einem Gegenbeispiel, dass auf die Bedingung der Diagonalisierbarkeit in Teil b) nicht verzichtet werden kann.

Aufgabe 3 *(2+2 = 4 Punkte)*

Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$.

a) Bestimmen Sie $-2 \cdot A^{100} - 10 \cdot A^{99} - 12 \cdot A^{98} + A + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$.

b) Begründen Sie, warum zu jeder invertierbaren quadratischen Matrix M über einem Körper K ein Polynom $f \in K[X]$ existiert mit $M^{-1} = f(M)$. Finden Sie ein solches Polynom für $K = \mathbb{R}$ und $M = A$.

<u>Hinweis:</u> Benutzen Sie den Satz von Cayley-Hamilton.

Bitte wenden

Aufgabe 4 *(2+2 = 4 Punkte)*

a) Seien $A \in \mathrm{M}(n \times n, K), B \in \mathrm{M}(m \times m, K)$ für $n, m \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathrm{M}((n+m) \times (n+m), K)$$

in Abhängigkeit der Minimalpolynome von A und B.

b) Bestimmen Sie für $a, b \in K$ mit $a \neq b$ die Minimalpolynome von

$$\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & 1 & \\ & & a & \\ & & & b \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & 1 & & & & \\ & a & & & & \\ & & a & & & \\ & & & b & & \\ & & & & b & 1 \\ & & & & & b \end{pmatrix}.$$