Übungsblatt 1

Abgabetermin: 27.04.2017, 9:20 Uhr.

Aufgabe 1 *(3+3 = 6 Punkte)*

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Endomorphismen:

a) $f_A : V \to V, X \mapsto A \cdot X$, wobei $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$ ist und f_A die Links-Multiplikation mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bezeichnet.

b) $f_n : \mathbb{R}[X]_{\leq n} \to \mathbb{R}[X]_{\leq n}$, wobei $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ von Grad $\leq n$ bezeichnet, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist und wobei f_n ein Polynom $g(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ auf die formale Ableitung von $g(X) \cdot X$ sendet, d.h. $f_n(g(X)) = \sum_{i=0}^n (i+1) a_i X^i$.

Aufgabe 2 *(3+3=6 Punkte)*

Seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^\times$ und $a_{(n)} := a_0 \cdot \ldots \cdot a_n$. Zeigen Sie:

a)

$$\det \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & a_1 & & & & \\ a_1 & a_1 + a_2 & a_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & a_{n-3} & a_{n-3} + a_{n-2} & a_{n-2} & \\ & & & a_{n-2} & a_{n-2} + a_{n-1} & a_{n-1} \\ & & & & a_{n-1} & a_{n-1} + a_n \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^n \frac{a_{(n)}}{a_j}.$$

b)

$$a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0}}}} = \frac{\det(A_n)}{\det(A_{n-1})} \quad \text{mit } A_i = \begin{pmatrix} a_0 & 1 & & & \\ -1 & a_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & a_{i-1} & 1 \\ & & & -1 & a_i \end{pmatrix}$$

(Alle nicht bezeichneten Einträge der Matrizen sind null, d.h. in es sind jeweils nur die Haupt- und die beiden Nebendiagonalen besetzt.)

Bitte wenden

Aufgabe 3 *(3+3=6 Punkte)*

a) Berechnen Sie für die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ das charakteristische Polynom, Eigenwerte, Eigenvektoren sowie die entsprechenden geometrischen und algebraischen Vielfachheiten.

b) Berechnen Sie die charakteristischen Polynome und die Eigenwerte der Endomorphismen aus Aufgabe 1.

Aufgabe 4 *(2+2=4 Punkte)*

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

a) Für $M = (m_{i,j}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ definieren wir die Spur $\mathrm{Sp}(M) := \sum_{k=1}^{n} m_{k,k}$. Zeigen Sie: Ist $N \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ eine weitere Matrix, so gilt $\mathrm{Sp}(MN) = \mathrm{Sp}(NM)$.

b) Wir definieren für einen Endomorphismus $f : V \to V$ eines endlich-dimensionalen K-Vektorraumes V die Spur, indem wir eine Basis $\mathfrak{B}$ von V wählen und $\mathrm{Sp}(f) := \mathrm{Sp}(M_{\mathfrak{B}}(f))$ setzen. Zeigen Sie, dass diese Definition wohldefiniert ist, d.h. dass sie nicht von der Wahl der Basis abhängt.