1 Vorspann

Detektionswahrscheinlichkeit:
Teilchen: $I_{12} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$
Materiewelle: $I = |\psi|^2$
Wellen: $I_{12} = |\psi_1 + \psi_2|^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\phi)$
$\phi = \mathbf{k}\mathbf{r}_{12}$
Welle muss normierbar sein: $\int \psi(x)\mathrm{d}x < \infty$

2 Materiewellen

$E = m_0c^2 = h\nu_0 \implies \nu_0 = m_0c^2/h, \lambda = h/p$
Bewegtes Bezugssystem $S', v_x = v$:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

nichtrelativistischer Limes $v \ll c \implies$

$$\omega_{dB} = \frac{m_0c^2}{\hbar} + \frac{m_0\mathbf{v}^2}{2\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2m} = \frac{E_{\text{ges}}}{\hbar}$$

$$\mathbf{k}_{dB} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\hbar}, k_{dB} = \frac{2\pi}{\lambda_{dB}}$$

$\psi(x,t) = \exp(-i(\omega_{dB}t - \mathbf{k}_{dB}\mathbf{x}))$
$p = mv, \lambda_{dB} = h/p$
Phasengeschwindigkeit: $v_{ph} = \omega/k$
Gruppengeschwindigkeit: $v_{gr} = \partial\omega/\partial k$
Wellenpaket:

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(k)e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega(k)t)}\mathrm{d}k$$

kanonisches Wellenpaket: $\psi(x, t=0) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)$
Heisenberg Unschärfe: $\Delta x \Delta p = \hbar\Delta x\Delta k = \hbar/2$
$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$
Allgemeine Dispersionsrelation: Näherung durch Taylor Reihe:

$$\omega(k) = \omega(k)|_{k_0} + \frac{\partial\omega}{\partial k}|_{k_0}(k - k_0) + \frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}|_{k_0}\frac{(k-k_0)^2}{2} + \cdots$$

$\kappa = k - k_0 \implies k = \kappa + k_0$

$$\psi(x,t) = e^{i(k_0x - \omega_0 t)}\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\psi}(\kappa + k_0)e^{-i(\omega_0' t - x)\kappa + (\omega_0''/2)\kappa^2 t}$$

Effektive Masse: $\frac{\omega_0''}{2}\kappa^2 := \frac{\hbar\kappa^2}{2m^*}$
Beugung an Gitter, Gitterabstand B, Gitterperiode: d, Beugungswinkel α:

$$g_n = \frac{1}{n\pi}\sin n\frac{\pi B}{d}$$

$$\psi(x, z=0) = N\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \exp\left(\frac{i2\pi nx}{d}\right)$$

$$\psi(x,z,t) = N\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \exp\left(\frac{i2\pi nx}{d}\right)e^{i(k_z' z - \omega t)}$$

$n^2G^2 + k_z'^2 = k_z^2, 2\pi/dk \ll 1 \implies \alpha = \lambda_{dB}/d$

3 Gitter Aufbau, Gitterperiode d:

$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \eta^2(1 + e^{ik(l_2 - l_1)})$
Verschiebung des Gitters im Δx:

$$\implies |\psi|^2 \propto 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{d}\Delta x\right)$$

Potential V über Länge L:

$$k' = k\sqrt{1 - \frac{2m}{\hbar^2k^2}V} = k\sqrt{1 - \frac{V}{E_{ges}}} = kn \approx k\left(1 - \frac{V}{2E_{\text{ges}}}\right)$$

$\Delta\phi = (k' - k)L = -(V/2E)k_{dB}L$

Minimal detektierbares Potential: $\frac{\hbar^2 k_{dB}}{m}\frac{\pi}{L}$

3 Allgemeine Quantenmechanik

ket: $|\psi\rangle$, bra: $\langle\psi| = |\psi\rangle^*$.
Skalarprodukt: $\langle\varphi|\psi\rangle = \int \varphi^*(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})\mathrm{d}^3x$
Wellenpaket: $|k\rangle \to$ de-Broglie Welle mit Impuls $\hbar k$.
$|\text{Wellenpaket}\rangle = |\psi_{WP}\rangle = \int \widetilde{\psi}(k)\,|k\rangle\,\mathrm{d}k$
Observable $f \to$ Operator $\hat{f}$:
Mittelwert: $\langle\psi|f|\psi\rangle = \langle f\rangle$
Varianz: $\mathrm{VAR}(f) = \langle\hat{f}^2\rangle - \langle\hat{f}\rangle^2$
Eigenzustand $\implies \hat{f}\,|\psi\rangle = k\,|\psi\rangle, k \in \mathbb{C}$
Varianz = 0 für Eigenzustände.
$\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ gleichzeitig messbar, wenn:
$[\widehat{A}, \widehat{B}] = \widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A} = 0$
$[A, B] = i$ const. $\implies \mathrm{VAR}(A)\mathrm{VAR}(B) \geq$ const./2
Ort: $\hat{x}\,|x\rangle = x\,|x\rangle, \hat{x}\,|k\rangle = i(\partial/\partial k)\,|k\rangle$
Impuls: $\hat{p}\,|k\rangle = \hbar k\,|k\rangle, \hat{p}\,|x\rangle = -i\hbar(\partial/\partial x)\,|k\rangle$
Energie: $\widehat{H}\,|k\rangle = (1/2m)\hat{p}\hat{p}\,|k\rangle = (\hbar^2k^2/2m)\,|k\rangle$
$\widehat{H}\,|x\rangle = -(\hbar^2/2m)(\partial^2/\partial x^2)\,|x\rangle$
de-Broglie Wellen: $\widehat{E} = i\hbar(\partial/\partial t)$
Energieeigenzustand: $\psi(t) = \psi(0)\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)$
Gesamtenergie: $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$
Allgemein: H Hamiltonfunktion:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \mapsto \widehat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{x}})$$

Operatorgleichung: $i\hbar(\partial/\partial t)\,|\psi\rangle = \widehat{H}\,|\psi\rangle$
Schrödingergleichung:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi(\mathbf{x},t) + V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x},t)$$

Randbedingung: $\int |\psi|^2\mathrm{d}V = 1$
Separationsansatz: $\psi(x,t) = \exp(-i(E/\hbar)t)\phi(x)$
$E\phi(x) = -(\hbar^2/2m)(\partial^2/\partial x^2)\phi(x) + V(x)\phi(x)$

Potentialstufe mit $V_0 < E$:

$\psi_I(x,t) = Ae^{i(kx - \omega_{dB}t)} + Be^{i(-kx - \omega_{dB}t)}$
$\phi_{II}(x) = Ce^{-\alpha x}, \alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$
$B = A\frac{ik + \alpha}{ik - \alpha}, C = A\frac{2ik}{ik - \alpha}$

Potentialbarriere, Transmissionswahrscheinlichkeit

$$T = \frac{|\psi_{II}(d)|^2}{|\psi_{II}(0)|^2} \propto e^{-2\alpha d}$$

Potentialtopf mit $V_0 \to \infty$, Breite d:

$$\phi_n(x) = \sqrt{2}\,d\sin\left(\frac{n\pi}{d}x\right), E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2md^2}n^2$$

$n \implies n - 1$ Nullstellen.
diskrete Energien $\implies$ Revival. Kastenpotential:

$$\frac{E_n - E_n'}{\hbar}t = 2\pi$$

Harmonischer Oszillator

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}\,a_{ho}}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n\left(\frac{x}{a_{ho}}\right)e^{-\frac{1}{2}(x/a_{ho})^2}$$

$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}), a_{ho} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$
$n \implies n$ Nullstellen, $n - 1$ Knoten.
Grundzustand ist ein Zustand minimaler Heisenberg-Unschärfe.

4 Wasserstoff

$$\widehat{H} = \frac{\hat{p}_2^2}{2m_k} + \frac{\hat{p}_1^2}{2m_e} - \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_{12}|}$$

$$E_{\text{ges}}\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{\hbar^2}{2m_k}\triangle_2\psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) - \frac{\hbar^2}{2m_e}\triangle_1\psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_{12}|}\psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$$

$$E_{\text{ges}}\psi(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2M}\triangle_s\psi(\mathbf{r}_s,\mathbf{r}) + \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\triangle_r - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}|}\right)\psi(\mathbf{r}_s,\mathbf{r})$$

mit $\mu = \frac{m_k m_e}{m_k + m_e}, M = M_k + m_e$
externe Dynamik: $-\frac{\hbar^2}{2M}\triangle_s\psi_s(\mathbf{r}_s) = E_s\psi_s(\mathbf{r}_s)$
Lösung: de-Broglie Welle mit $\lambda_s = \frac{h}{\sqrt{2ME_s}}$
interne Dynamik: $\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$
$l = 0, \ldots, n-1, m = -l, \ldots, +l$
$(n-1) - l$ radiale Knoten, l Winkelabhängige Knoten.

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{8\hbar^2\varepsilon_0^2}\frac{Z^2}{n^2} = -R_y^*\frac{Z^2}{n^2}$$

$R_y^* \approx 13.6\,\mathrm{eV}$

$$\rho = 2Z\frac{r}{na_B'}, a_B' = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{\mu e^2}$$

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\left(\frac{Z}{na_B'}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}}\,e^{-\rho/2}\rho^l L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)$$

radiale Wahrscheinlichkeit: $|R_{nl}(r)|^2r^2$

$$\langle r\rangle = \frac{a_B'}{Z}n^2\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{l(l+1)}{n^2}\right)\right)$$

$(n-1) - l$ Knoten
Schale mit höchster Wahrscheinlichkeit:
$l_{\max} = n - 1 \implies r_{\max} = n^2(a_B'/Z)$
$\widehat{L}_z = -i\hbar(\partial/\partial\varphi) = -i\hbar(x\partial_y - y\partial_x)$
$\widehat{L}_z\,|n,l,m\rangle = m\hbar\,|n,l,m\rangle$
$\widehat{\mathbf{L}}^2\,|n,l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)\,|n,l,m\rangle$
$l = 0,1,2,3 \leftrightarrow s,p,d,f$

Optische Übergänge

Dipol-Auswahl Regel: $|l - l'| = \Delta l = 1, \Delta s = 0$
QM: Dipolmoment $\hat{d} = q\hat{\mathbf{r}} \to \hat{d}_z = e\hat{z}$
$\langle n,l,m|\hat{d}|n,l,m\rangle = 0 \forall n,l,m$
Dipolmoment nur nicht null für Superposition von zwei Zuständen mit $\Delta l \neq 0$.
Wasserstoffserie: $\frac{1}{\lambda} = \widetilde{R}_H\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$
Lyman, Balmer, Paschen: $m = 1,2,3$
Superposition zerfällt exponentiell:
$E(t) = \Re(Ee^{-t/\tau}e^{i\omega_0 t})$

$$E(\omega) = \frac{E_0}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\frac{1}{\tau} - i(\omega_0 - \omega)} + \frac{1}{\frac{1}{\tau} + i(\omega_0 + \omega)}\right)$$

$$I(\omega) \propto \frac{1}{1 + (\tau(\omega_0 - \omega))^2}$$

Jeder Sender ist auch ein Empfänder, Absorption von Licht ist auch nur für bestimmte Frequenzen groß.

Zeeman Effekt

$\widehat{H} = \frac{1}{2m_e}(\hat{\mathbf{p}}^2 + e(\hat{\mathbf{p}} \cdot \widehat{\mathbf{A}} + \widehat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + e^2\widehat{\mathbf{A}}^2) + V(\hat{\mathbf{x}})$

$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, $\mathbf{A}$: Vektorpotential

$\mathbf{B} = \hat{e}_z B_z \implies \widehat{\mathbf{A}} = (B_z/2)(-y, x, 0)$

$\widehat{H} = \frac{1}{2m_e}\triangle + V(\mathbf{x}) + \frac{e}{2m_e}B_z\frac{\hbar}{i}(x\partial_y - y\partial_x) + \frac{e^2}{2m_e}\frac{B_z^2}{4}(x^2+y^2)$

$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \frac{e}{2m_e}B_z\widehat{L}_z$

$\implies E_{n,m} = E_n + \mu_B m B_z, \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$

Term-Symbol: $n^{(2s+1)}L_{l+s}$, $(2s+1)$: Multiplizität, n: Schale / Energieniveau, L: Bahndrehimpuls, $0,1,2,3,4,5,6,7 \leftrightarrow$ S,P,D,F,G,H,I,K

$\Delta m = -1, 0, 1 \leftrightarrow \sigma_-, \pi, \sigma_+$. σ_-, σ_+: zirkulär Polarisiert, π: linear Polarisiert.

5 Spin

$E_{\text{pot}} = -\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B}$

$\mathbf{F} = -\nabla \cdot E_{\text{pot}} \implies F_z = -\frac{\partial}{\partial z}E_{\text{pot}}$

Elektronen: $s = \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

Spin ist Drehimpuls $\rightarrow$ Eigenzustände von $\hat{\mathbf{S}}, S_z$

$\mu_s = -g_{el}\mu_B m_s, g_{el}$: gyromagnetischer- / Landé-Faktor ≈ 2 für Elektron

$\implies E_{\text{pot}} = -\mathbf{B}_{\text{kern}} \cdot \mu_s = g_{EL}\frac{\mu_B}{\hbar}B_z\widehat{S}_z$

$[\widehat{S}_x, \widehat{S}_y] = i\hbar\widehat{S}_z, [\widehat{S}_i, \widehat{S}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\widehat{S}_k$

Spinordarstellung:

$|\uparrow\rangle = (1,0), |\downarrow\rangle = (0,1)$

$\implies \widehat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \widehat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}, \widehat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \widehat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$

Darstellung auf Bloch-Kugel:

$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)\,|\uparrow\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\phi}\,|\downarrow\rangle$

Feinstruktur:

$\widehat{H} = \widehat{H}_{NR} - \frac{\hat{p}^4}{8m_e^3c^2} + \frac{1}{2m_e^2c^2}\frac{1}{\hat{r}}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\widehat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}} + \frac{\pi\hbar^2}{2m_e^2c^2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r})$

Gesamtdrehimpuls: $\hat{\mathbf{J}} = \widehat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$.

Eigenzustände: $|J, m_j\rangle, J = l-s, \ldots, l+s, m_j = -J, \ldots, J$

$\widehat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{J}}^2 - \widehat{\mathbf{L}}^2 - \hat{\mathbf{S}}^2)$

$\widehat{H}_{ls} = \frac{Ze^2\mu_0}{8\pi m_e^2 r^2}\widehat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}$

Feinstrukturkonstante: $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$

$E_{nj} = E_n\left(1 + \frac{Z^2\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{J+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right)\right)$

6 Helium

zusätzliche Elektron-Elektron-Wechselwirkung.

$H = -\frac{\hbar}{2\mu}(\triangle_1 + \triangle_2) - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_1|} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_2|} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_{12}|}$

Separationsansatz: $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_1(\mathbf{r}_1)\psi_2(\mathbf{r}_2)$, ψ_1, ψ_2 Lösungen des Wasserstoff für $Z = 2$

Grundzustand: $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{Z^3}{a_B}\exp\left(\frac{-Z}{a_B}|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2|\right)$

Spin-Spin Kopplung: $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ analog zu $\mathbf{J}$, $m_s = m_1 + m_2, -S \leq m_s \leq S$ Eigenzustände:

Singlett: $|S=0\rangle : (1/\sqrt{2})(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \implies m_s = 0$

$|S=1\rangle \implies$ Triplett:

$m_s = 0 : (1/\sqrt{2})(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$

$m_s = 1 : |\uparrow\uparrow\rangle$

$m_s = -1 : |\downarrow\downarrow\rangle$

$S = 0$: antisymmetrisch $\implies |ab\rangle = -|ba\rangle$

$S = 1$: symmetrisch $\implies |ab\rangle = |ba\rangle$

Pauli Prinzip: 2 Fermionen können nicht den gleichen Zustand besetzen. $\iff$ Gesamtwellenfunktion muss bezüglich Austausch von 2 Elektronen antisymmetrisch sein.

Grundzustand ist symmetrisch bezüglich Austausch der beiden Elektronen $\implies$ Spin-Freiheitsgrad muss antisymmetrisch sein $\implies S = 0$.

Singulett: Angeregete Zustände müssen symmetrisch bezüglich Austausch sein $\implies$

${}^1S_0 : \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{10}(\mathbf{r}_1)\psi_{20}(\mathbf{r}_2) + \psi_{10}(\mathbf{r}_2)\psi_{20}(\mathbf{r}_1))$

${}^1P_1 : \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{10}(\mathbf{r}_1)\psi_{21}(\mathbf{r}_2) + \psi_{10}(\mathbf{r}_2)\psi_{21}(\mathbf{r}_1))$

Triplett: $S = 1$, Spin-Freiheitsgrad symmetrisch bezüglich Austausch $\implies$ räumilcher Freiheitsgrad antisymmetrisch.

${}^3S_1 : \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{10}(\mathbf{r}_1)\psi_{20}(\mathbf{r}_2) - \psi_{10}(\mathbf{r}_2)\psi_{20}(\mathbf{r}_1))$

7 Mathematische Zusammenhänge

Fourierreihe: $f(x+d) = f(x) \implies$

$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \exp\left(\frac{i2\pi nx}{d}\right)$

$g_n = \frac{1}{d}\int_x^{x+d} f(x)\exp\left(\frac{-i2\pi nx}{d}\right)\mathrm{d}x$

Fouriertransformation:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(k)\exp(ikx)\mathrm{d}k$

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(k)\exp(-ikx)\mathrm{d}x$

$\varepsilon << 1 \implies (1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$

Hermitesche Polynome:

$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$

Laguerre Polynome:

$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})$

$L_n^k(x) = (-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_{n+k}(x)$

$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$

erfüllen: $xy''(x) + (k+1-x)y'(x) + ny(x) = 0$

Legendre Polynome:

$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l$

$P_l^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)$

$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$

$(x^1 - 1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x)$

Laplace in Kugelkoordinaten:

$\triangle = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$

8 Extras

Matrixoptik $r + t = 1$:

Strahlteiler: $\begin{pmatrix}\sqrt{r} & \sqrt{t}\\\sqrt{t} & \sqrt{r}e^{i\pi}\end{pmatrix}$

Phasenshift: $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & e^{i\theta}\end{pmatrix}$

ideales Gas: $\frac{f}{2}k_BT = \frac{1}{2}m\langle v^2\rangle$

Welle: $c = \lambda\nu$

$\hbar = h/2\pi$

$h = 6.626\,099\,34(89) \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$

Potentialbarriere mit Matrix-Rechnung: $k_n = k\sqrt{1 - \frac{V_n}{E_{\text{ges}}}}$

$\phi_n(x) = \begin{pmatrix}a_n e^{ik_n x}\\b_n e^{-ik_n x}\end{pmatrix}$

Propagationsmatrix: $\phi_n(x_n) = D(d_n, k_n)\phi_n(x_n + d_n)$

$D(d_n, k_n) = \begin{pmatrix}e^{-ik_n d_n} & 0\\0 & e^{ik_n d_n}\end{pmatrix}$

Transfermatrix (Potentialgrenze): $T(k_n, k_m) = \frac{1}{2k_n}\begin{pmatrix}k_n + k_m & k_n - k_m\\k_n - k_m & k_n + k_m\end{pmatrix}$

Wahrscheinlichkeitsstromdichten: $j = \Re(\phi^*\hat{p}\phi/m)$

Transmissions- Reflektionswahrscheinlichkeit: $P_T, P_R, P_T + P_R = 1$

Kugelflächenfunktionen:

Additionstheorem: $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')$

$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta, \varphi)Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$

Für $\theta = \theta', \varphi = \varphi'$ verschwindet die Winkelabhängigikeit:

$P_l(1) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}|Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2$

Abstrahlungsrichtungen bei Zeeman: Richtung Magnetfeld: nur σ_- und σ_+, diese sind zirkulär polarisiert (Dipol strahl nicht in Schwingungrichtung ab). Senkrecht zum Magnetfeld sieht man π linear polarisiert in Richtung des Magnetfelds und σ_- und σ_+ in senkrecht auf Magnetfeld.