2. Übungsblatt zur Experimentalphysik 2 (SoSe 2017)

Gaußscher Satz und Potential

Abgabe am 4./5. 5. 2017 in den Übungen

Name(n): Gruppe: Punkte: ___/___/___/___

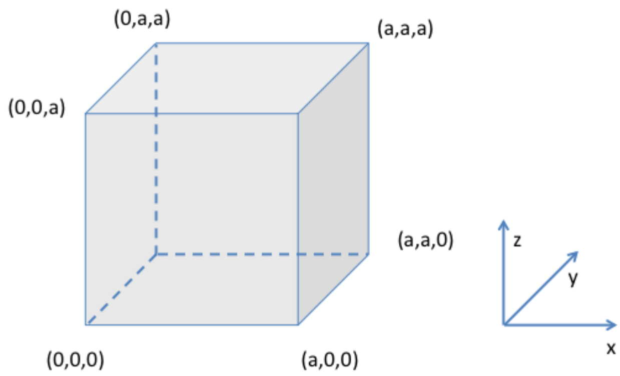
2.1 Gaußscher Satz (10 Punkte)

Die Divergenz eines Vektorfeldes haben Sie im letzten Semester bereits kennen gelernt:

$$\mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

In dieser Aufgabe geht es um die Verwendung der Divergenz im Gaußschen Satz. Beachten Sie, dass je nach Lehrbuch für die Divergenz zwei unterschiedliche Schreibweisen verwendet werden:

$$\mathrm{div}\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$



Im Folgenden soll die Gültigkeit des Gaußsche Satzes für Vektorfelder motiviert werden:

$$\int_A \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) dV \tag{1}$$

Hierbei bezeichnet $\vec{F}$ ein gegebenes Vektorfeld. Das Volumen V sei von der Fläche A umschlossen. Der Term $\vec{F} \cdot d\vec{A}$ bezeichnet den Feldfluss nach außen durch das Flächenelement dA.

Für das skizzierte würfelförmige Volumen soll das Integral auf der linken Seite über die ganze Außenfläche des Würfels ausgeführt werden. Das Integral auf der rechten Seite wird über das entsprechende Würfelvolumen bestimmt.

a) Bestimmen Sie den linken Teil der Gleichung 1, indem Sie die Ausdrücke für alle sechs Seitenflächen einzeln bestimmen und aufsummieren.

b) Vereinfachen Sie den gefundenen Ausdruck durch Verwendung von Beziehungen der folgenden Form:

$$F_x(a, y, z) - F_x(0, y, z) = \int_0^a \frac{\partial F_x}{\partial x} dx \tag{2}$$

F_x bezeichne die x–Komponente des Vektorfeldes $\vec{F}$. Nun können Sie den entstandenen Ausdruck umformen und erhalten den Term auf der rechten Seite der Gleichung.

c) Berechnen Sie die Divergenz für folgende Vektorfelder und interpretieren Sie Ihr Ergebnis: $\vec{F}_1 = (0, 0, a)$ mit $a =$const., $\vec{F}_2 = (x, y, z)$ und $\vec{F}_3 = (-y, x, 0)$.

2.2 **Geladene Kugeln** (10 Punkte)

Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme des Gaußschen Gesetzes das elektrische Feld innerhalb und außerhalb einer geladenen Kugel bzw. von geladenen Kugelschalen:

a) Eine elektrische Ladung Q ist gleichmäßig innerhalb einer Kugel mit Radius R verteilt (homogen geladene Kugel). Bestimmen Sie das elektrische Feld E innerhalb ($r < R$) und außerhalb ($r > R$) der Kugel.

b) Zwei dünne konzentrische Kugelschalen mit Radius R_1 und R_2 ($R_1 < R_2$) besitzen eine gleichmäßige Oberflächenladungsdichte σ_1 und σ_2.

b1) Bestimmen Sie das elektrische Feld für $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ und $r > R_2$.

b2) Unter welcher Bedingung wird $E = 0$ für $r > R_2$?

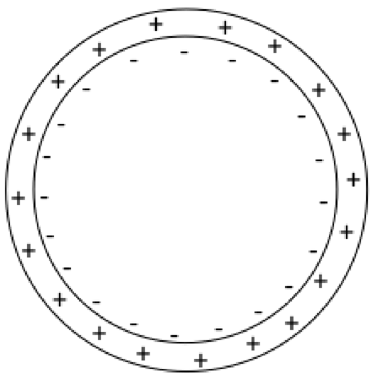
b3) Unter welcher Bedingung wird $E = 0$ für $R_1 < r < R_2$?

2.3 **Elektrizität der Atmosphäre** (10 Punkte)

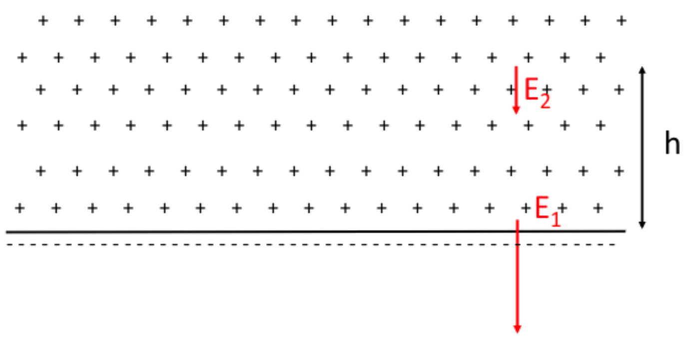
Bei schönem Wetter beträgt das vertikale elektrische Feld in Bodennähe $E_1 = 130\,\mathrm{V/m}$ und in der Höhe $h = 10\,\mathrm{km}$ beträgt es $E_2 = 4\,\mathrm{V/m}$.

a) Welche Flächenladungsdichte σ der Erdoberfläche und welche (als homogen angenommene) Raumladungsdichte ϱ der Atmosphäre folgen aus diesen Angaben?

b) Welche Potentialdifferenz U herrscht zwischen Erdoberfläche und 10 km Höhe?



(1)



(2)

Hinweis: Machen Sie sich klar, in welche Richtung das Feld, das durch die Raumladung erzeugt wird zeigt (siehe Abbildung 1)). Für die konkrete Rechnung können Sie die Krümmung der Erde vernachlässigen (siehe Abbildung 2)).

2.4 **Energiefilter** (10 Punkte)

Ein Elektron fliegt entlang der Symmetrieachse (z-Achse) durch einen elektrisch negativ geladenen Drahtring (Radius $R = 2{,}5\,\mathrm{cm}$, Drahtdicke vernachlässigbar, Ladung $Q = -1\,\mathrm{nC}$).

a) Berechnen Sie das elektrische Potential entlang der Symmetrieachse durch die Mitte des Rings. Verwenden Sie hierbei die gängige Konvention, dass das Potential unendlich weit von einer Ladungsverteilung entfernt Null sei. Wie groß ist das Potential im Zentrum des Rings ($z = 0$)? Geben Sie den Zahlenwert des Potentials in Volt an.

b) Leiten Sie aus dem Potential aus (a) das E-Feld entlang der Symmetrieachse ab.

c) Welche kinetische Energie muss das Elektron in großem Abstand vom Ring mindestens besitzen, um durch den Ring hindurch fliegen zu können und nicht reflektiert zu werden? Geben Sie das Ergebnis in den Einheiten J und eV (Elektronvolt) an.

d) Berechnen Sie die zugehörige Geschwindigkeit des Elektrons.