Analysis 1 - Übungsblatt 9

Wintersemester 2016/2017

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Dr. Frederik Ziebell, Chris Kowall

Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis1.php`

Abgabe: 13. Januar, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 9.1 4 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ monoton steigend und bijektiv ist mit

$$\exp(q) = \mathrm{e}^q \qquad \forall\, q \in \mathbb{Q}$$

für die Eulersche Zahl e.

(b) Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion bezeichnen wir mit $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, der *natürliche Logarithmus*. Zeigen Sie, dass diese Funktion monoton steigend und stetig ist mit

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \text{und} \quad \ln(x^q) = q\ln(x) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_{>0}, q \in \mathbb{Q}.$$

Hinweis: Sie können $(\exp(q))^r = \exp(qr)$ für alle $q, r \in \mathbb{Q}$ benutzen. Zeigen Sie, dass dies auch für $q \in \mathbb{R}$ gilt.

Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $x \in \mathbb{R}$ definiert man die allgemeine Potenz durch

$$a^x := \mathrm{e}^{x\ln(a)} := \exp(x\ln(a)).$$

Erläutern Sie dem Weihnachtsmann, warum die üblichen Potenzgesetze auch für beliebige $x \in \mathbb{R}$ gelten und die allgemeine Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und positiv ist für jedes $a > 0$.

Aufgabe 9.2 4 Punkte

Betrachten Sie die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus und beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) Beweisen Sie mithilfe des Leibnizkriteriums für alternierende Reihen die Gültigkeit der nachstehenden Abschätzungen für alle $x \in [-2, 2] \setminus \{0\}$

$$\left|\frac{\sin(x) - x}{x}\right| \leq \frac{x^2}{3!} \qquad \text{und} \qquad \left|\frac{\cos(x) - 1}{x} + \frac{x}{2}\right| \leq \frac{|x|^3}{4!}$$

(b) Folgern Sie aus Aufgabenteil (a), dass $\cos(2) < 0$, aber $\cos(0) > 0$ sowie

$$\sin(x) > 0 \quad \forall\, x \in (0, 2]$$

gilt.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $x, h \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x) - \cos(x + h) = 2\sin\left(x + \frac{1}{2}h\right)\sin\left(\frac{1}{2}h\right)$$

und folgern Sie, dass die Cosinus-Funktion cos auf dem Intervall $[0, 2]$ streng monoton fallend ist und genau eine Nullstelle innerhalb dieses Intervalls besitzt. Im Folgenden bezeichnen wir diese Nullstelle mit ξ und definieren $\pi := 2\xi$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 8.2.

Bitte wenden!

Aufgabe 9.3 4 Punkte

Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, das zugehörige abgeschlossene Intervall $I := [a, b]$ und ein Folge Lipschitz-stetiger Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : I \to \mathbb{R}$ und einer gemeinsamen Lipschitz-Konstanten $L \in \mathbb{R}_+$ gegeben. Zeigen Sie die beiden Aussagen:

(a) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichgradig stetig.

(b) Falls für ein $x_0 \in I$ die Zahlenfolge $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt.

Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Arzelà-Ascoli, dass es mindestens einen Häufungswert der Funktionenfolge

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad f_n : [-\xi, \xi] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

gibt und bestimmen Sie diesen Häufungswert oder sogar die Grenzfunktion. Zeigen Sie hierfür zunächst die Identität

$$\sin(x + h) - \sin(x) = 2\cos\left(x + \frac{1}{2}h\right)\sin\left(\frac{1}{2}h\right) \qquad \forall\, x, h \in \mathbb{R} \tag{1}$$

sowie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \tag{2}$$

Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 9.2.

Aufgabe 9.4 4 Punkte

(a) Beweisen Sie, dass die Sinusfunktion auf dem Intervall $[-\xi, \xi]$ streng monoton steigend und bijektiv mit $\sin(\pm\xi) = \pm 1$ ist. Ihre Umkehrfunktion bezeichnen wir mit *Arcus-Sinus*

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\xi, \xi],$$

wobei $2\xi = \pi$ analog zur Aufgabe 9.2.

(b) Zeigen Sie, dass $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ streng monoton fallend und bijektiv mit $\cos(0) = 1$ sowie $\cos(\pi) = -1$ ist. Die Umkehrfunktion sei *Arcus-Cosinus* arccos.

(c) Bestimmen Sie die Ableitungen der in (a) und (b) genannten Funktionen mithilfe des Differenzenquotienten bzw. eines Satzes aus der Vorlesung, wobei für die Umkehrfunktionen die Differenzierbarkeit auf $(-1, 1)$ überprüft werden soll.

Wir
wünsch-
en Ihnen ein
frohes, erholsames
Weihnachtsfest und einen
guten
Rutsch
ins neue Jahr!

Bitte wenden!

Die folgenden Aufgaben sind Bonus-Aufgaben, die zusätzliche Punkte einbringen, aber nicht bearbeitet werden müssen.

***Aufgabe 9.5** 4 Punkte

Für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$ sei der reelle Vektorraum

$$V_n := \left\{ p \in C([0,1]) \;\middle|\; p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ mit } a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

der reellwertigen Polynome vom Grad höchstens n auf dem Intervall $[0,1]$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\|p\| := \max_{k=0,\dots,n} |a_k| \qquad \forall\, p \in V_n \text{ mit } p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

eine Norm auf V_n definiert ist.

(b) Ist durch $|||p||| := \max_{k=0,\dots,n} \sqrt{|a_k|}$ ebenfalls eine Norm auf V_n definiert? Beweisen oder widerlegen Sie dies.

(c) Beweisen Sie, dass sich jedes $p \in V_n$ um einen beliebigen Punkt $x_0 \in [0,1]$ entwickeln lassen kann, d.h. dass es die eindeutige Darstellung

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k$$

gilt mit $k! \cdot b_k = p^{(k)}(x_0)$ für $0 \le k \le n$ und die k-te Ableitung des Polynoms $p \in V_n$ an der Stelle x_0. Dabei ist $p^{(0)} := p$ definiert.

(d) V_∞ bezeichne den Vektorraum der für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergenten Potenzreihen mit Zentrum $x_0 = 0$. Betrachten Sie $p \in V_\infty$ mit $p(x) := \sin(x)$ und ξ aus Aufgabe 9.2. Berechnen Sie für $x_0 = \xi$ die Folgenglieder von $(b_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ aus Aufgabenteil (c) und stellen Sie die bereits bekannte Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \, (x - \xi)^k$$

auf. Stimmt diese Potenzreihe mit der Sinus-Funktion überein?

***Aufgabe 9.6** 4 Punkte

(a) Zeigen Sie die Abschätzung

$$\ln(1 + x) \le x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, x > -1.$$

(b) Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{mit} \quad a_k := \frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right).$$

Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzungen

$$0 \le a_k \le \frac{1}{k(k+1)}$$

und folgern Sie die Konvergenz der Reihe.

(c) Gegeben sei die Folge $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\gamma_n = H_n - \ln(n)$ für die bereits definierten harmonischen Zahlen H_n. Zeigen Sie, dass $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit einem Grenzwert $\gamma \in [0,1]$. Der Grenzwert ist die sogenannte *Euler-Mascheroni-Konstante* γ.