Analysis 1 - Übungsblatt 6

Wintersemester 2016/2017

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Dr. Frederik Ziebell, Chris Kowall

Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis1.php`

Abgabe: 9. Dezember, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 6.1 4 Punkte

(a) Bestimmen Sie jeweils die Häufungswerte der beiden Folgen sowie die Häufungspunkte der Mengen $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ bzw. $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, falls sie existieren.

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n + 2$

(ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n = (-1)^n + \frac{2}{n}$$

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien reelle Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ definiert mit $I_{n+1} \subset I_n$.

(i) Zeigen Sie, dass die durch die Randpunkte ∂I_n definierten Folgen konvergieren und es gilt

$$a := \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n =: b.$$

(ii) Beweisen Sie, dass die Folge von geschachtelten Intervallen einen nicht leeren, ebenfalls abgeschlossenen Schnitt besitzt mit

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [a, b].$$

Aufgabe 6.2 4 Punkte

(a) Für jedes feste $m \in \mathbb{N}$ sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left[\prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{m}\right) \right]$$

gegeben.

(i) Zeigen Sie, dass für $m > n$ die Abschätzung

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \geq a_n$$

gilt.

(ii) Beweisen Sie für festes $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{m\to\infty} a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

(iii) Zeigen Sie die Gleichheit

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \mathrm{e} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

mit der Eulersche Zahl e.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 5.3.

Bitte wenden!

(b) Beweisen Sie die Identität
$$\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^m = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

(c) Bestimmen Sie die Häufungswerte der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$b_n = \left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)^{3n}.$$

Aufgabe 6.3 4 Punkte

(a) Beweisen Sie, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen genau dann konvergiert wenn die Reihe
$$S := \sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1})$$
konvergiert. Zeigen Sie außerdem, dass in diesem Fall $\lim_{n\to\infty} a_n = a_1 - S$ gilt.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ definiere H_n mit
$$H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$
die n-te *harmonische Zahl*. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Konvergenz der folgenden Reihe sowie die Identität
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+n)} = \frac{H_n}{n}$$
mit dem Kriterium aus Aufgabenteil (a) sowie dem Ansatz
$$\frac{1}{k(k+n)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+n}$$
für geeignete $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) Begründen Sie, dass die Doppelreihe
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k(k+n)}$$
divergiert.

Aufgabe 6.4 4 Punkte

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$$

(b)
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{k^2+4}$$

(c)
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$$

(d)
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{k}{4}\right)^k$$