Analysis 1 - Übungsblatt 4

Wintersemester 2016/2017

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Dr. Frederik Ziebell, Chris Kowall

Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis1.php`

Abgabe: 25. November, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 4.1 4 Punkte

Bezeichne $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ sowie $\mathbb{R}_{>0} := \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^n$ für festes $n \in \mathbb{N}$ streng monoton wachsend ist.

(b) Betrachten Sie für festes reelles $x > 0$ die Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}, n \mapsto \sqrt[n]{x}$. Beweisen Sie, dass die Funktion für $x \geq 1$ monton fallend ist und für $x \in (0, 1)$ streng monoton steigt.

(c) Beweisen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ für jedes feste $x > 0$ gilt.

Aufgabe 4.2 4 Punkte

(a) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil folgender Zahlen.

(i) $z_1 = \frac{1+3\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$

(ii) $z_2 = (1 + \mathrm{i})^{2017}$

(b) Skizzieren Sie die Mengen

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left| \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}} \right| = 1 \right\} \quad \text{und} \quad B = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\}$$

in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 4.3 4 Punkte

Eine reelle oder komplexe Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergent ist.

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a| \tag{1}$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a| \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a. \tag{2}$$

(b) Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert. Gegeben seien $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n = \frac{4n^2 - 7n + 1}{n^2 + n} \quad \text{und} \quad c_n = \frac{(-2)^n + 10}{4^n}.$$

(c) Untersuchen Sie, ob die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = (-1)^n + 1/n$ konvergiert oder divergiert.

Bitte wenden!

Aufgabe 4.4 4 Punkte

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller oder komplexer Zahlen heißt *Nullfolge*, falls sie konvergiert und ihr Grenzwert Null ist. Zeigen Sie die nachstehenden Aussagen.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge genau dann wenn die Folge der Absolutbeträge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(b) Gibt es ein $\gamma \in (0,1)$, sodass für eine reelle Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Ungleichung

$$|b_{n+1}| \le \gamma |b_n| \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

gilt, so ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

(c) Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := (-2)^n/n!$ hat den Grenzwert 0.

(d) Sei $q \in \mathbb{Q}$ negativ, dann ist die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n := n^q$ eine streng monoton fallende Nullfolge.