Analysis 2 - Übungsblatt 2

Sommersemester 2017

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Jan-Erik Busse, Chris Kowall

Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis2.php`

Abgabe: 5. Mai, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 2.1 4 Punkte

Seien $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder komplexen Zahlen und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass für jede Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{K}^n$ durch

$$\|A\| := \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\in\mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Ax\| \qquad \forall\, A \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

eine Norm auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}^{n\times n}$ der Matrizen definiert ist. Diese Norm wird als die von der Vektornorm $\|\cdot\|$ erzeugte, natürliche Matrixnorm bezeichnet.

(b) Beweisen Sie die Identität

$$\|A\| = \max_{x\in\mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Ax\| \qquad \forall\, A \in \mathbb{K}^{n\times n}.$$

Aufgabe 2.2 4 Punkte

Prüfen Sie die Anwendbarkeit des Banachschen Fixpunktsatzes.

(a) Betrachten Sie die Abbildung $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1 + \mathrm{e}^x)$ und zeigen Sie die Abschätzung

$$|T(x) - T(y)| < |x - y| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Prüfen Sie, ob die Funktion einen Fixpunkt in $\mathbb{R}$ besitzt.

(b) Prüfen Sie jede der Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes für die Funktion

$$f : (0, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}x$$

und treffen Sie eine Aussage über die Existenz eines Fixpunkts von f im metrischen Raum $((0, 1], |\cdot|)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 2.3 4 Punkte

Sei (M, d) ein vollständiger, metrischer Raum und $T : M \to M$ eine Abbildung. Unter der m-maligen Komposition $T^m, m \in \mathbb{N}$, der Selbstabbildung T versteht man

$$T^m : M \to M, \quad T^m(x) = (\underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{m-\text{mal}})(x).$$

(a) Zeigen Sie, dass T einen eindeutigen Fixpunkt besitzt, falls für ein $m \in \mathbb{N}$ die m-malige Hintereinanderausführung T^m eine strenge Kontraktion ist, d.h.

$$\exists\, \alpha \in (0,1) \quad \forall\, x, y \in M : \qquad d(T^m(x), T^m(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

(b) Für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, seien $c : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $d \in C([a, b])$ gegeben. Betrachten Sie die Abbildung

$$T : C([a,b]) \to C([a,b]) \quad \text{mit} \quad [T(u)](t) = \int_a^t c(t,s) \cdot u(s)\, \mathrm{d}s + d(t) \qquad \forall\, t \in [a,b],$$

welche auf dem Banachraum $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ jeder stetigen Funktion u eine Funktion $T(u)$ zuordnet. Zeigen Sie induktiv, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt mit

$$\|T^n(u) - T^n(v)\|_\infty \leq \frac{[C \cdot (b-a)]^n}{n!} \|u - v\|_\infty \qquad \forall\, u, v \in C([a,b]), n \in \mathbb{N}.$$

Folgern Sie, dass genau eine Funktion $u \in C([a, b])$ existiert, welche $T(u) = u$ erfüllt.

Aufgabe 2.4 4 Punkte

Gegeben seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = xy \cdot g(x,y) \qquad \text{mit} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Untersuchen Sie f und g auf Stetigkeit.

(b) Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen von f.

(c) Zeigen Sie, dass f zweimal partiell differenzierbar ist, aber $\partial_x \partial_y f(0,0) \neq \partial_y \partial_x f(0,0)$ gilt.