Analysis 1 - Übungsblatt 13

Wintersemester 2016/2017

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Dr. Frederik Ziebell, Chris Kowall

Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis1.php`

Aufgabe 13.1 10 Punkte

Geben Sie kurze, präzise Antworten auf die folgenden Fragen ohne Begründungen.

(1) Was besagt der Zwischenwertsatz für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}, a < b$?

(2) Wie ist der Arkussinus arcsin definiert und was ist der Definitionsbereich dieser Funktion?

(3) Für welche $x \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ absolut? Geben Sie den Wert der Reihe an.

(4) Ist die Kosinus-Funktion $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig?

(5) Wie ist die Eulersche Zahl e definiert?

(6) Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k/k$ konvergent?

(7) Geben Sie alle Stammfunktionen von $f(x) = 1/x$ an.

(8) Wie ist ein Häufungswert einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen definiert?

(9) Was ist der Unterschied zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz für eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ für reelle Zahlen $a < b$?

(10) Wie ist der Betrag einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ definiert?

Aufgabe 13.2 2 Punkte

Seien $a < b$ reelle Zahlen. Welche Eigenschaft einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist beschrieben durch

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x, y \in [a, b] : \quad |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Formulieren Sie die Negation dieser Aussage.

Aufgabe 13.3 2 Punkte

Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ mithilfe vollständiger Induktion die Identität

$$\prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{(2^k)}\right) = \frac{1 - x^{(2^{n+1})}}{1 - x}.$$

Aufgabe 13.4 4 Punkte

Man untersuche die untenstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \qquad \text{sowie} \qquad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}$$

auf Konvergenz und gebe gegebenenfalls deren Grenzwert an.

Bitte wenden!

Aufgabe 13.5 5 Punkte

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz sowie absolute Konvergenz:

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^2} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{\sqrt{k}}$$

Aufgabe 13.6 3 Punkte

Prüfen Sie, ob die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{\sqrt{|x|}} \quad \text{für } x \neq 0, \qquad f(0) := 0,$$

stetig ist.

Aufgabe 13.7 3 Punkte

Untersuchen Sie, ob die Funktionen $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ und $g(x) = \sqrt{|x|}$ Lipschitz-stetig bzw. gleichmäßig stetig sind.

Aufgabe 13.8 3 Punkte

Betrachten Sie die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen

$$f_n : [-1,1] \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad f_n(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{n}\right).$$

Bestimmen Sie die Grenzfunktion der Funktionenfolge und untersuchen Sie mithilfe des ersten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, ob die Konvergenz gleichmäßig ist.

Aufgabe 13.9 5 Punkte

Geben Sie die Definitionsbereiche der folgenden reellwertigen Funktionen f, g an und bestimmen Sie deren Ableitungen:

$$\text{(a)} \quad f(x) = \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{2x})} \qquad\qquad \text{(b)} \quad g(x) = (\tan(x))^2$$

Aufgabe 13.10 5 Punkte

Bestimmen Sie die Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ der für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ definierten Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Wie groß ist der Konvergenzbereich dieser Taylorreihe und stellt sie die Funktion f in diesem Bereich dar?

Aufgabe 13.11 4 Punkte

Untersuchen Sie mithilfe der Regeln von L'Hospital die Existenz der folgenden Grenzwerte und bestimmen Sie diese gegebenenfalls:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^3} - 1}{1 - \cos(x)} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^m + 1)}{\ln(x^n)}, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 13.12 4 Punkte

Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\text{(a)} \quad \int_0^{\pi} \sin(x)\cos(x)\, \mathrm{d}x \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}\, \mathrm{d}x$$