Analysis 1 - Übungsblatt 10

Wintersemester 2016/2017
Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Dr. Frederik Ziebell, Chris Kowall
Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis1.php`

Abgabe: 20. Januar, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 10.1 4 Punkte

Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und die differenzierbare Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f im Fall

$$f'(x) \geq 0 \qquad \text{für alle } \ x \in (a, b)$$

monoton steigend ist und für $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ sogar streng monoton steigt.

(b) Folgern Sie, dass im Fall $f'(x) \leq 0$ bzw. $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$ die Funktion f monoton bzw. streng monoton fällt.

(c) Beweisen Sie, dass f mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$ bereits konstant ist.

(d) Betrachten Sie die Tangens-Funktion

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \text{für } \ x \in \mathbb{R} \ \text{ mit } \cos(x) \neq 0.$$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D von tan und die Bereiche von D, in denen die Funktion streng monoton wachsend bzw. fallend ist.

Aufgabe 10.2 4 Punkte

Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen auf den angegebenen Definitionsbereichen differenzierbar sind und geben Sie die Ableitungen in den Bereichen an, wo sie existieren.

(a) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x}}$, wobei $\sqrt{0} = 0$ wie in Aufgabe 10.4 (b) bemerkt.

(b) $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ mit $g(x) = x^x$.

(c) Die Umkehrfunktion *Arcustangens* arctan des Tangens tan eingeschränkt auf $(-\xi, \xi)$, wobei ξ wie in Aufgabe 9.2 definiert ist.

Betrachten Sie die Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos(x^{-1}), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass h differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 10.3 4 Punkte

Für $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ seien die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} \quad \text{sowie} \quad \binom{\alpha}{0} := 1$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass das n-te Taylorpolynom der Funktion

$$f_\alpha : (-1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (1+x)^\alpha$$

für festes $\alpha \in \mathbb{R}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ durch

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

gegeben ist. Ermitteln Sie den Konvergenzradius der Reihe.

(b) Beweisen Sie, dass die Taylorreihe T_∞ für festes $x \in (-1,1)$ die Funktion f_α darstellt, d.h. $T_\infty(x) = f_\alpha(x)$ gilt.

Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 4.4 bei der Abschätzung des Restglieds.

(c) Zeigen Sie für $\alpha \in (0,1)$ und $u, v \in \mathbb{R}_+$ die Abschätzung $(u+v)^\alpha \le u^\alpha + v^\alpha$ und folgern Sie die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$|y^\alpha - x^\alpha| \le |y-x|^\alpha \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+.$$

Aufgabe 10.4 4 Punkte

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ gegeben und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b) mit gleichmäßig beschränkten Ableitungen, d.h. es gibt ein $L > 0$ mit $|f'(x)| \le L$ für alle $x \in (a,b)$. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L ist, d.h. beweisen Sie

$$|f(x) - f(y)| \le L|x-y| \qquad \forall\, x, y \in [a,b].$$

(b) Prüfen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ die Funktion $g_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha$ Lipschitz-stetig bzw. gleichmäßig stetig ist. Dabei ist $0^\alpha = 0$, denn $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$ aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion.

(c) Für welche Parameter $\alpha > 0$ ist $h_\alpha : [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha$ Lipschitz-stetig bzw. gleichmäßig stetig? Bitte begründen Sie Ihr Ergebnis.

Hinweis. Sie können zum Beweis der gleichmäßigen Stetigkeit Aufgabe 10.3 verwenden.