Analysis 2 - Übungsblatt 1

Sommersemester 2017

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Jan-Erik Busse, Chris Kowall

Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis2.php`

Abgabe: 28. April, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 1.1 4 Punkte

Für $1 \leq p < \infty$ betrachten Sie die Folgenräume ℓ^p aus Aufgabe 0.2 sowie

$$\ell^\infty := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R} \mid \|x\|_\infty < \infty\} \quad \text{mit} \quad \|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

(a) Zeigen Sie, dass auch $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter reeller Vektorraum ist.

(b) Beweisen Sie, dass $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ für $1 \leq p \leq \infty$ Banachräume sind.

Aufgabe 1.2 4 Punkte

Untersuchen Sie folgende metrische Räume.

(a) Betrachten Sie die Menge $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ aller reeller Folgen, d.h.

$$\mathbb{R}^\mathbb{N} := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R} \text{ für } n \in \mathbb{N}\}.$$

Zeigen Sie, dass durch $d : \mathbb{R}^\mathbb{N} \times \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}_+, d(x,y) = \rho(x-y)$ mit

$$\rho(x) := \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i} \frac{|x_i|}{1+|x_i|}$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ definiert ist, die keine Norm darstellt.

(b) Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$d : X \times X, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y, \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases}$$

auf der Menge $X := \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b = c+1\}$ tatsächlich eine Metrik definiert. Besitzt X auch eine $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur?

Bitte wenden!

Aufgabe 1.3 4 Punkte

(a) Die n-dimensionale Einheitssphäre bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$S_1 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}.$$

Skizzieren Sie die von den folgenden Normen erzeugten Einheitssphären S_1 in $\mathbb{R}^2$:

(i) ℓ_2-Norm: $\|x\| := \|x\|_2 \quad \text{mit} \quad \|x\|_2^2 := x_1^2 + x_2^2.$

(ii) ℓ_∞-Norm: $\|x\| := \max\{|x_1|, |x_2|\}.$

(iii) gewichtete ℓ_1-Norm: $\|x\| := 2|x_1| + |x_2|.$

(b) Betrachten Sie den Vektorraum $C([a,b])$ der stetigen, reellwertigen Funktionen auf dem reellen Intervall $[a,b], a < b$. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall\, f,g \in C([a,b])$$

ein reelles Skalarprodukt auf $C([a,b])$ definiert ist.

(c) Prüfen Sie mit der Funktionenfolge

$$f_n : [0,2] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^n & \text{für } x \in [0,1], \\ 1 & \text{für } x \in (1,2], \end{cases}$$

ob das Paar $(C([0,2]), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ für $a = 0, b = 2$ aus Aufgabenteil (b) ein Hilbert-Raum darstellt.

Aufgabe 1.4 4 Punkte

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein Anfangswert $u_0 \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $u \in C^1([0,\infty))$ löst die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) \quad \text{für} \quad t \geq 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

(ii) $u \in C([0,\infty))$ löst die Integralgleichung

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(u(s))\,\mathrm{d}s.$$

(b) Betrachten Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$ die lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \alpha x$. Beweisen Sie, dass die Anfangswertaufgabe aus Aufgabenteil (a) genau eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}_+)$ besitzt und geben Sie diese an.