Analysis 1 - Übungsblatt 8

Wintersemester 2016/2017

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Dr. Frederik Ziebell, Chris Kowall

Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis1.php`

Abgabe: 23. Dezember, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 8.1 4 Punkte

(a) Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte, abgeschlossene Menge und $f : D \to f(D) \subset \mathbb{R}$ stetig sowie injektiv. Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to D$ stetig auf der Bildmenge $f(D)$ ist.

(b) Für $D := \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\} \cup \{0\}$ sei die stückweise definierte Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{für } x < -1, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ x-1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass f stetig und bijektiv ist, aber eine unstetige Umkehrfunktion f^{-1} besitzt. Bestimmen Sie diese Umkehrfunktion.

(c) Beweisen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto \sqrt[n]{x}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig ist.

Aufgabe 8.2 4 Punkte

Betrachten Sie die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus und beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)$ sind stetig.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$ und

$$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \text{sowie} \qquad \cos(-x) = \cos(x).$$

(c) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y), \tag{1}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y). \tag{2}$$

(d) Die Sinus- sowie Cosinusfunktion sind gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 8.3 4 Punkte

Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ gegeben.

(a) Man zeige, dass für stetiges $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die Bildmenge $f([a, b])$ ebenfalls ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$ ist.

(b) Sei $g : [a, b] \to \mathbb{Q}$ stetig. Zeigen Sie, dass g konstant ist.

(c) Sei $h : [a, b] \to [a, b]$ eine Funktion, dann heißt $x \in [a, b]$ mit $h(x) = x$ *Fixpunkt von* h. Zeigen Sie, dass es für stetiges h mindestens einen Fixpunkt gibt.

(d) Zeigen Sie mithilfe von Aufgabenteil (c), dass die Gleichung

$$\exp(x) - 1 = (1 - x)(\mathrm{e} - 1)$$

eine Lösung $x \in [0, 1]$ besitzt.

Aufgabe 8.4 4 Punkte

Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *punktweise konvergent* gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls es für $x \in D$ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon = n_\varepsilon(x) \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon.$$

Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *gleichmäßig konvergent* gegen f, wenn n_ε unabhängig von $x \in D$ gewählt werden kann.

Untersuchen Sie die untenstehenden Funktionenfolgen auf punktweise sowie gleichmäßige Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion.

(a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \mathrm{e}^{-2nx^2}$

(b) $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ und

$$g_n(x) := \begin{cases} nx & \text{für } x \in [0, \frac{1}{n}), \\ 2 - nx & \text{für } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), \\ 0 & \text{für } x \in [\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

(c) Für eine reelle Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{\varepsilon_n^2 + x^2}.$$