

Analysis 1 - Übungsblatt 7

Wintersemester 2016/2017

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Dr. Frederik Ziebell, Chris Kowall

Internetseite: <http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis1.php>

Abgabe: 16. Dezember, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 7.1

4 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \begin{cases} n^{-2} & \text{für } n = 2^k, \\ 2(2^{-k})^2 & \text{für } n - 1 = 2^k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

absolut konvergiert, jedoch

$$\limsup_{\substack{n \rightarrow \infty, \\ a_n \neq 0}} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 2$$

gilt.

(b) Bestimmen Sie diejenigen $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^{k^2}$$

konvergiert beziehungsweise divergiert.

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ für die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z+1)^k}{k}.$$

Konvergiert die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+1| = \rho$? Beweisen oder widerlegen Sie dies.

Aufgabe 7.2

4 Punkte

(a) Für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$ sei die parameterabhängige Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^k}$$

gegeben.

- (i) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe absolut konvergiert.
- (ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe absolut divergiert, d.h. die Reihe der Absolutbeträge divergiert.

(b) Gemäß der Vorlesung ist der Konvergenzradius ρ einer Potenzreihe mit Argument x und Zentrum x_0 die größt mögliche Konvergenzgrenze, d.h. ρ ist das Supremum aller Werte $|x - x_0|$, sodass die Potenzreihe für dieses x konvergiert. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \binom{2n}{n} x^n.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 7.3

4 Punkte

- (a) Prüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und geben Sie gegebenenfalls den Limes an.

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - e^{-x}}$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{|x + 1|}$$

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$$

- (b) Prüfen Sie die Vertauschbarkeit von Grenzprozessen, indem Sie die nachfolgenden Grenzwerte ($x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$) berechnen:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (\lim_{n \rightarrow \infty} x^n) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow 1^-} x^n)$$

Aufgabe 7.4

4 Punkte

- (a) Bestimmen Sie für $m, n \in \mathbb{N}$ die (stetige) Fortsetzung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$$

auf ganz \mathbb{R} .

- (b) Gegeben sei die Funktion $g : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In welchen Stellen des Intervalls $[0, 1]$ ist g stetig und in welchen unstetig? Zeigen Sie die entsprechende Aussage oder widerlegen Sie sie.

Hinweis: Verwenden Sie, dass \mathbb{Q} bzw. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in \mathbb{R} dicht liegt.

- (c) Zeigen Sie, dass die Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ Lipschitz-stetig ist.