Analysis 1 - Übungsblatt 3

Wintersemester 2016/2017

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Dr. Frederik Ziebell, Chris Kowall

Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis1.php`

Abgabe: 18. November, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 3.1 4 Punkte

Sei A eine abzählbar unendliche Menge und B eine weitere Menge. Zeigen Sie

(a) $B \subset A \;\Rightarrow\; B$ ist *höchstens abzählbar*, d.h. endlich oder abzählbar unendlich.

(b) Gibt es eine surjektive Abbildung $f : A \to B$, dann ist B höchstens abzählbar.

(c) Sind A_i für $i \in \mathbb{N}$ abzählbar unendliche Mengen, dann gilt:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \quad \text{ist abzählbar unendlich.}$$

Aufgabe 3.2 4 Punkte

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, falls sie nach oben und unten beschränkt ist. Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht leere, beschränkte Mengen. Zeigen Sie folgende Aussagen für

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \quad \text{sowie} \quad -A := \{-a \mid a \in A\}.$$

(a) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$

(b) $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$

(c) $\sup(-A) = -\inf(A)$

(d) $\inf(-A) = -\sup(A)$

Aufgabe 3.3 4 Punkte

(a) Beweisen Sie für das Maximum bzw. Minimum zweier Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ die Darstellung

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{sowie} \quad \min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

und zeigen Sie $\max\{-x, -y\} = -\min\{x, y\}$.

(b) Beweisen Sie die folgenden Abschätzungen für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$:

$$2|xy| \leq \varepsilon x^2 + \varepsilon^{-1} y^2 \quad \text{und} \quad (x + y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2.$$

(c) Zeigen Sie, dass für zwei positive reelle Zahlen $x, y > 0$ stets gilt:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

Verifizieren Sie außerdem, dass im Falle $0 < m \leq x, y \leq M$ zusätzlich

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq 2\frac{M}{m}$$

gilt.

Bitte wenden!

Aufgabe 3.4 4 Punkte

Betrachten Sie eine *monoton steigende* Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, d.h. $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, welche zusätzlich nach oben beschränkt sei. Außerdem sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *monoton fallende* Folge reeller Zahlen mit $b_{n+1} \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie nach unten beschränkt. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq m,$$

wobei $a := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ definiert sei. Dasselbe gilt für b_n anstatt a_n, wenn man a durch $b := \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ ersetzt.

(b) Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := \frac{n-1}{n}$ erfüllt die Voraussetzungen für eine der Folgen aus Aufgabenteil (a) und konvergiert gegen 1.

(c) Für die rekursiv definierte Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$d_1 := 2, \quad d_{n+1} := \frac{d_n}{2} + \frac{1}{d_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

gilt $d_n \in \mathbb{Q}, d_n^2 \geq 2$ sowie $d_n > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge ist monoton fallend.