Analysis 1 - Übungsblatt 2

Wintersemester 2016/2017

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Dr. Frederik Ziebell, Chris Kowall

Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis1.php`

Abgabe: 11. November, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 2.1 4 Punkte

Konstruktion rationaler Zahlen mithilfe der bekannten ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie, dass für Paare $(r,s),(r',s') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ durch

$$(r,s) \sim (r',s') \quad :\Leftrightarrow \quad rs' = r's$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ definiert ist. Die zugehörigen Äquivalenzklassen bilden dabei die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ über die nachfolgende Abbildung in $\mathbb{Q}$ eingebettet werden kann, d.h. beweisen Sie die Injektivität von

$$\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} := \{[(r,s)] \mid (r,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}, \quad r \mapsto [(r,1)].$$

Aufgabe 2.2 4 Punkte

Im Folgenden seien $a, b \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}$ gegeben. Um die Schreibweise aus Aufgabe 2.1 abzukürzen, können Sie rationale Zahlen mit ihrem zugehörigen Bruch identifizieren und die gewöhnlichen Bruchrechenregeln im Körper $\mathbb{Q}$ voraussetzen.

(a) Zeigen Sie für $a \neq b$ die Identität

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

(b) Eine rationale Zahl a heißt *positiv*, falls gilt

$$a \in \mathcal{P} := \{b = r/s \in \mathbb{Q} \mid r, s \in \mathbb{N}\}.$$

Man schreibt auch $a > 0$ in diesem Fall. Analog zur Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{Q}$ definiert man die strenge Ordnung

$$b > a :\Leftrightarrow b - a \in \mathcal{P} \qquad \text{sowie} \qquad b < a :\Leftrightarrow a - b \in \mathcal{P}.$$

Beweisen Sie die Implikationen

(i) $a, b \in \mathcal{P} \;\Rightarrow\; a + b \in \mathcal{P}$

(ii) $a, b \in \mathcal{P} \;\Rightarrow\; ab \in \mathcal{P}, a/b \in \mathcal{P}$

(iii) $a, b \in \mathcal{P}, b < a \;\Rightarrow\; b^n < a^n$

(iv) $a, b \in \mathcal{P}, b < a \;\Rightarrow\; a^{-n} < b^{-n}$

Bitte wenden!

Aufgabe 2.3 4 Punkte

(a) Es seien $A, B \neq \emptyset$ zwei nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad \sup A \leq \sup B.$$

(b) Prüfen Sie, ob die reelle Menge

$$C := \left\{ \frac{x}{1+x} \,\middle|\, x \in \mathbb{R}, x > -1 \right\}$$

ein Infimum und Supremum bzw. Minimum sowie Maximum besitzt und bestimmen Sie diese, falls sie existieren.

Aufgabe 2.4 4 Punkte

Für $n, k \in \mathbb{N}_0, k \leq n$ seien die *Fakultät* und der *Binomialkoeffizient* wie in der Vorlesung definiert

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k \qquad \text{und} \qquad \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a)

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

(b)

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = \frac{n!-1}{n!}.$$