Analysis 1 - Übungsblatt 1

Wintersemester 2016/2017

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Dr. Frederik Ziebell, Chris Kowall

Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis1.php`

Abgabe: 4. November, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 1.1 4 Punkte

Seien A, B, C und D Mengen. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für Mengen.

(a) $\emptyset \subset A$,

(b) $A \subset A$,

(c) $A \subset B, B \subset C$ impliziert $A \subset C$,

(d) $A \cap B = B \cap A$,

(e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap D) \times (B \cap C).$$

Aufgabe 1.2 4 Punkte

In den Übungen sowie der Vorlesung bezeichne $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Menge der natürlichen Zahlen inklusive der Null.

(a) Man zeige, dass für Paare $(m, n), (m', n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch

$$(m, n) \sim (m', n') \quad :\Leftrightarrow \quad m + n' = m' + n$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert ist. Die zugehörigen Äquivalenzklassen bilden dabei die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

(b) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussage oder widerlegen Sie sie, indem Sie hierzu zunächst die negierte Aussage bilden.

$$\exists\, b \in \mathbb{N}_0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{Z} : \quad x^2 + x \neq b. \tag{1}$$

Aufgabe 1.3 4 Punkte

Seien A, B und C Mengen sowie $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Wenn f und g injektiv sind, so ist $g \circ f$ injektiv.

(b) Sind f und g surjektiv, dann ist $g \circ f$ surjektiv.

(c) Die Injektivität von $g \circ f$ impliziert die Injektivität von f.

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x+1} + 1.$$

Verifizieren Sie, ob diese Funktion injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 1.4 4 Punkte

Beweisen Sie mithilfe des Prinzips der vollständigen Induktion die folgenden Identitäten.

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, gilt
$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}.$$